CAPÍTULO 8

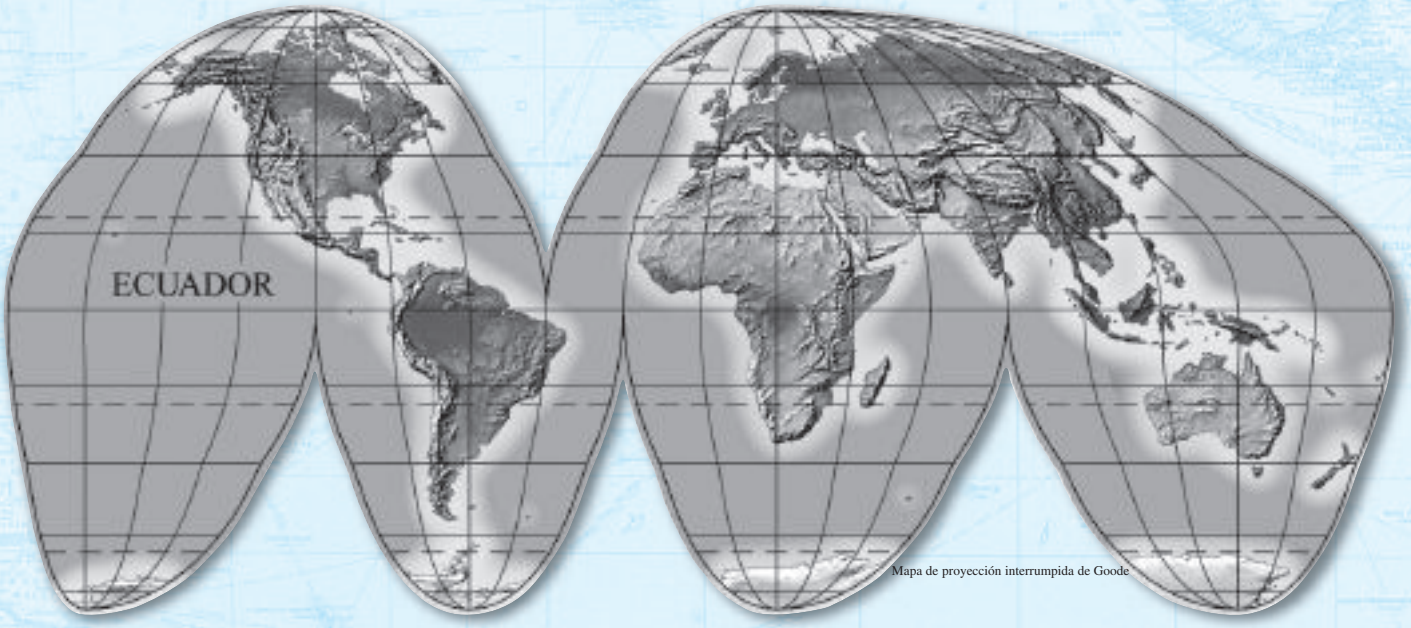
Las funciones y sus gráficas

Matemáticas en la vida diaria

Aplanando el mundo Hacer un mapa preciso del planeta es difícil porque hay que representar en dos dimensiones, una superficie que en realidad es tridimensional. Las funciones matemáticas conocidas como *proyecciones* permiten a los cartógrafos hacer mapas. Una proyección asigna a cada punto en una esfera tridimensional, un punto sobre una superficie bidimensional, logrando con esto, *aplanar* el mundo.

Existen diferentes tipos de proyecciones, algunas de ellas crean mapas muy interesantes. La proyección de Mercator usada como imagen de fondo en estas dos páginas, exagera el área de las masas de tierra más alejadas del ecuador, como Groenlandia y la Antártica. En este tipo de mapa, Groenlandia muestra un tamaño parecido al del continente de África, cuando su superficie real sólo equivale al 7% de la superficie de África. La proyección interrumpida de Goode reduce esta distorsión, pero fragmenta los océanos y la Antártica.

Piensa al respecto ¿Recuerdas las redes que estudiaste en geometría? ¿En qué se parecen las redes de sólidos geométricos a una proyección?



Mapa de proyección interrumpida de Goode

Carta a la familia

Estimados alumno(a) y familiares:

En el siguiente capítulo, vamos a estudiar funciones y sus gráficas. El concepto de función es esencial en el álgebra y ha sido uno de los hilos conductores principales a lo largo de este curso, aunque no hemos usado todavía el término *función.*

Una manera de entender cómo actúan las funciones, es imaginarlas como una máquina que al recibir una entrada (un número u otra cosa), produce una salida. La salida debe ser *única*. Esto significa que para cada entrada, sólo existe una determinada salida. Además, la salida debe ser *consistente,* es decir, se debe obtener la misma salida cada vez que se usa una misma entrada. Por ejemplo, en la máquina que se muestra en la figura, si la entrada fuera 3, la máquina lo multiplicaría por 5 y la salida sería 15. Cada vez que la entrada sea 3, la salida será 15.

Las funciones a menudo se expresan como enunciados matemáticos. Por ejemplo, todas las siguientes reglas describen la función representada por la máquina anterior: multiplica por 5.

$$y = 5x \qquad f(x) = 5x \qquad g(t) = 5t$$

Una vez que hayamos estudiado las funciones como máquinas de entrada y salida, empezaremos a usar gráficas para calcular los valores máximo y mínimo de una función y usaremos funciones para resolver problemas. Por ejemplo, si se tiene 6 metros de cerca para construir un corral para conejos y se quiere cercar la mayor cantidad de área posible, podemos usar la función $A(L) = L(3 - L)$ y determinar que cada lado de la cerca debe medir 1.5 metros.

Vocabulario Aprenderemos los siguientes términos nuevos en este capítulo:

dominio	**rango**
función	**intersección *x***

¿Qué pueden hacer en el hogar?

Es probable que durante las siguientes semanas su hijo(a) muestre interés por funciones y gráficas. Pueden ayudarle a pensar en situaciones que se puedan representar como funciones. Por ejemplo:

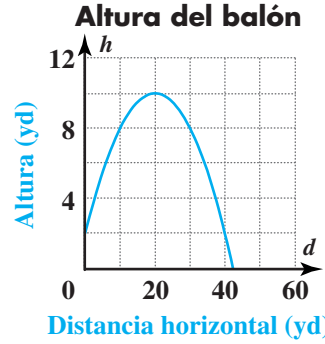
Entrada: la cuenta de un restaurante	Salida: propina del 15%
Entrada: la medida del lado de un cuadrado	Salida: el área del cuadrado
Entrada: número de adultos que asisten al cine	Salida: ganancias totales, el boleto cuesta $8

8.1 Funciones

En tus estudios de álgebra has analizado muchas relaciones entre variables, relaciones como éstas:

Un carro que viaja por la carretera a 55 millas por hora por t horas cubrirá una distancia de $55t$ millas. Esto se puede representar con la ecuación $d = 55t$.

Cuando un *quarterback* arroja el balón, su altura en yardas cuando ha recorrido d yardas se podría describir con la ecuación $h = 2 + 0.8d - 0.02d^2$.



VOCABULARIO
función

Muchas de las relaciones que estudiaste, incluyendo las anteriores, tienen un nombre especial: se llaman *funciones.* En las matemáticas, una **función** es una relación entre la variable de entrada y la variable de salida en la que hay sólo una salida por cada entrada.

- En el ejemplo del carro, la variable de entrada es el tiempo consumido en la carretera. La variable de salida es la distancia recorrida. Como sólo puede haber una distancia recorrida para un tiempo dado, la relación es una función. En este caso, la distancia recorrida es una *función del* tiempo.
- En el ejemplo de fútbol americano, la variable de entrada es la distancia horizontal recorrida por la pelota, la variable de salida es la altitud de la pelota. Como sólo puede haber una altitud para una distancia horizontal dada, la relación es una función. En este caso, la altitud es una *función de* la distancia horizontal.

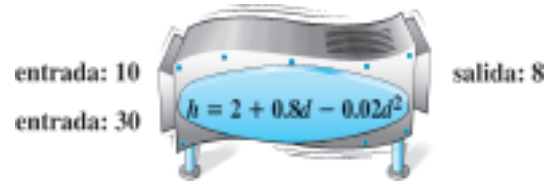
Una manera de pensar sobre una función es imaginar una máquina que toma una entrada, un número, una palabra u otra cosa (dependiendo de lo que sea la función) y produce una salida.

Por ejemplo, supón que pusiste 10 dentro de una máquina de funciones para el ejemplo de fútbol americano. Como la máquina es una función, la salida debe ser *única.* Si pones 10 en la máquina, te puede dar una salida de 8, pero no te puede dar un 8 junto con algún otro número.

CONTENTS

Para una máquina de funciones, la salida debe ser consistente. O sea, la máquina siempre debe dar la misma salida para la misma entrada. Si obtienes una salida de 8 para una entrada de 10, entonces cada vez que pongas 10 dentro de la máquina, la salida será 8.

Es posible que dos (o más) entradas produzcan la misma salida. Por ejemplo, la máquina de la función balón-altitud producirá 8 cuando pongas 10 ó 30 dentro de ésta. (¡Inténtalo!)

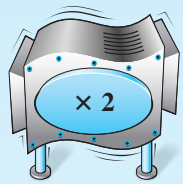


Si más de una salida es posible para una entrada dada, la relación *no* es una función. Por ejemplo, una máquina que produce las raíces cuadradas de números positivos no puede ser una función, porque cada número positivo tiene *dos* raíces cuadradas.

Piensa & comenta

Aquí hay algunos ejemplos de funciones. Para cada función, explica por qué sólo hay una salida posible para cada entrada.

- Entrada: un número
  Salida: el doble de ese número



- Entrada: un entero
  Salida: clasificación como par o impar
- Entrada: el número de seguro social de una persona
  Salida: la fecha de nacimiento de esa persona
- Entrada: el nombre del estado
  Salida: la capital del estado

- Entrada: la longitud del lado de un cuadrado
  Salida: el área de ese cuadrado
- Entrada: una palabra
  Salida: la primera letra de esa palabra

¿Cuáles de las funciones anteriores dan las mismas salidas para diferentes entradas? Explica.

Las siguientes relaciones *no* son funciones. Para cada una explica por qué habría más de una salida para algunas entradas.

- Entrada: un número
  Salida: un número menor que ese número
- Entrada: un número entero
  Salida: un factor de ese número
- Entrada: una persona
  Salida: el nombre del abuelo de esa persona
- Entrada: el nombre de una ciudad
  Salida: el nombre del estado en el que se puede encontrar esa ciudad
- Entrada: la longitud del lado de un rectángulo
  Salida: el área de un rectángulo
- Entrada: una palabra
  Salida: esa palabra con las letras reordenadas

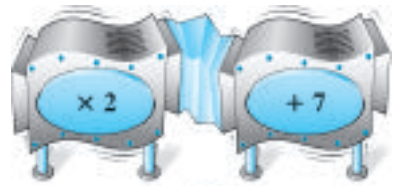
CONTENTS

Investigación 1 Máquinas de funciones

Puedes describir una función de varias maneras, tales como usar palabras, símbolos o máquinas. En esta investigación, pensarás sobre las funciones como máquinas.

Serie de problemas A

Dos máquinas que desempeñan una operación cada una, se han conectado para formar una función más complicada, llamada Función A. La Función A toma una entrada, la duplica, y después produce 7 más que ese resultado como una salida.



Función A

1. Si la entrada es 5, ¿cuál es la salida?

2. Si la entrada es $^{-}4$, ¿cuál es la salida?

3. Si la salida es $^{-}10$, ¿cuál podría haber sido la entrada?

4. ¿Hay más de una respuesta para el Problema 3? Explica por qué sí o por qué no.

5. Si la entrada es algún número *x,* ¿cuál es la salida?

6. La Función A se llama una *función lineal.* Explica por qué eso tiene sentido.

7. La Función B se representa por esta conexión de máquinas. ¿Es la misma que la Función A? Explica.

Función B

8. Si es posible, describe una conexión que "anulará" la Función A. Es decir, crea una conexión de manera que si pones un número en la Función A y después pones la salida en tu conexión, *siempre* obtendrás tu número original. Si no es posible, explica por qué no.

Serie de problemas B

La máquina "¿Primo?" toma números enteros positivos como entradas y produce *sí* si el número es primo y *no* si no lo es.

1. Si la entrada es 3, ¿cuál es la salida?
2. Si la entrada es 2, ¿cuál es la salida?
3. Si la entrada es 100, ¿cuál es la salida?
4. Si la entrada es 1, ¿cuál es la salida?
5. Si la salida es *sí*, ¿cuál podría haber sido la entrada?
6. Hay más de una respuesta para el Problema 5? Explica por qué sí o no.
7. Si es posible, describe una máquina que cancele la máquina "¿Primo?". O sea, crea una máquina que tome la salida de la máquina "¿Primo?" y siempre produzca el número original. Si no es posible, explica por qué no.

Serie de problemas C

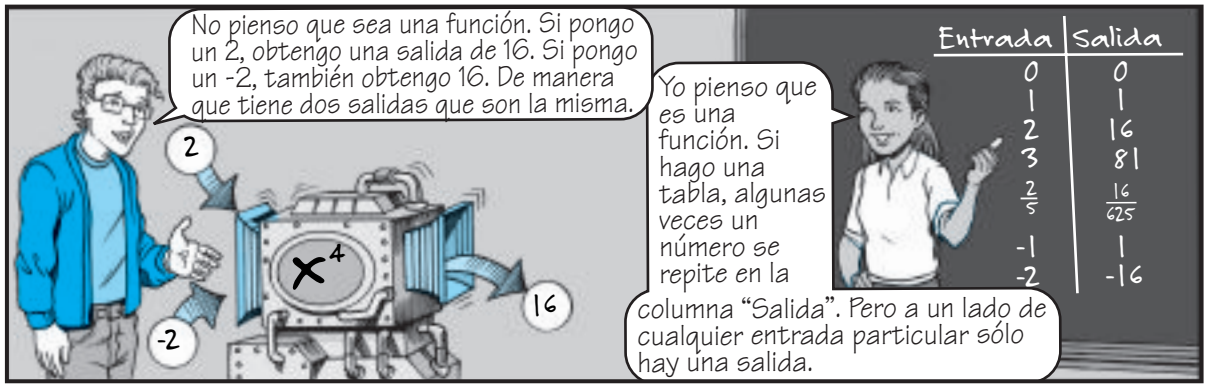
La máquina "3" toma números como entradas y siempre produce el número 3.

1. Si la entrada es 17, ¿cuál es la salida?
2. Si la entrada es $^{-}2$, ¿cuál es la salida?
3. Si la salida es 3, ¿cuál podría haber sido la entrada?
4. ¿Hay más de una respuesta al Problema 3? Explica por qué sí o por qué no.
5. Explica por qué "3" es una función.
6. La función "3" es una *función constante.* Explica por qué ese nombre tiene sentido.
7. Si es posible, describe una máquina que cancele la máquina "3". O sea, crea una máquina que tome la salida de la máquina "3" y siempre produzca tu número original. Si no es posible, explica por qué no.

CONTENTS

Comparte & resume

Lucita y Ben tratan de decidir si $y = x^4$ es una función.



¿Quién tiene razón, Ben o Lucita? ¿Es $y = x^4$ una función? Explica cómo lo sabes.

Investigación 2 Describe funciones con reglas y gráficas

Las funciones como la descrita por esta conexión, son un tipo de regla que asigna un valor de salida a cada valor de entrada. A menudo puedes escribir tales reglas como ecuaciones algebraicas, lo cual es más fácil que dibujar máquinas.

Por ejemplo, cada una de estas ecuaciones describe la misma función, como la que se muestra en la conexión: multiplique la entrada por 5 y después súmale 1.

$$y = 5x + 1 \qquad f(x) = 5x + 1 \qquad g(t) = 5t + 1$$

A menudo, las letras como la f y la g se usan para nombrar funciones. En la segunda regla anterior, la variable x representa la entrada, f es el nombre de la función y $f(x)$ representa la salida. El símbolo $f(x)$ se lee "f de x". *No* significa "f por x". En lugar de eso, significa "aplica la regla f al valor x". Por ejemplo, $f(2) = 5(2) + 1 = 11$. Esto se ilustra a continuación.

CONTENTS

Serie de problemas D

Kenneth piensa sobre una regla para cambiar un número en otro número. Él se pregunta si su regla es una función.

1. Haz una tabla de entrada/salida para la regla de Kenneth que muestre las salidas para al menos cuatro entradas.
2. ¿Es una función la regla de Kenneth? ¿Cómo lo puedes deducir?
3. Para las Partes a, b y c, decide qué funciones describen la regla de Kenneth.

   a. $y = (2x + 1)^2$
   $y = 2x^2 + 1$
   $y = 2(x + 1)^2$
   $y = (2x)^2 + 1$

   b. $m = (2n + 1)^2$
   $a = (2b + 1)^2$
   $p = (2t + 1)^2$

   c. $f(z) = 2(z + 1)^2$
   $g(x) = (2x + 1)^2$
   $p(t) = (2t + 1)^2$
   $j(k) = 1 + (2k)^2$

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas E

Puedes graficar una función con la variable de entrada en el eje horizontal (el eje x) y la variable de salida en el eje vertical (el eje y).

1. Grafica la regla de Kenneth de la Serie de problemas D en tu calculadora.

   a. ¿Qué viste de entrada en la calculadora para la regla?

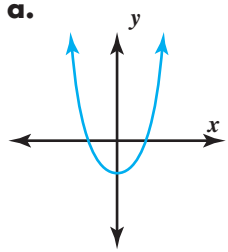
   b. Bosqueja la gráfica. Recuerda rotular los valores mínimos y máximos en cada eje.

Recuerda

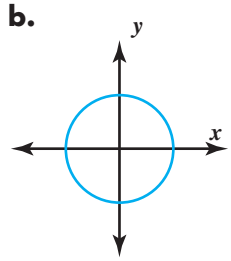
Para que una relación sea una función, sólo puede haber una salida para una entrada dada.

2. Decide cuáles de las siguientes gráficas representan funciones. Explica cómo lo decidiste.

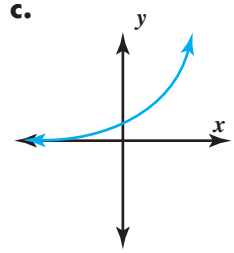
a.



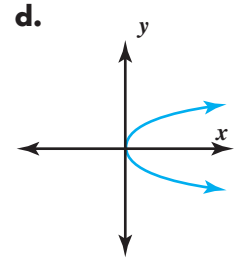
b.



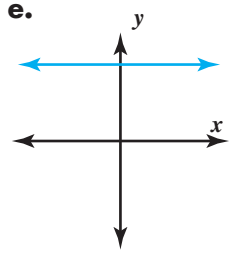
c.



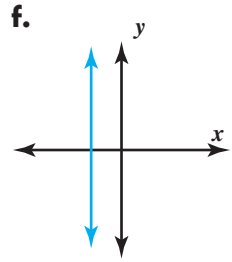
d.



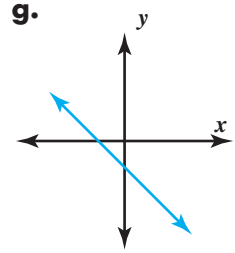
e.



f.



g.

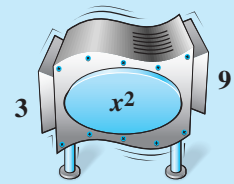


Cuando tienes una función tal como $f(x) = x^2$, es posible que quieras encontrar el valor de la función para diferentes valores de x.

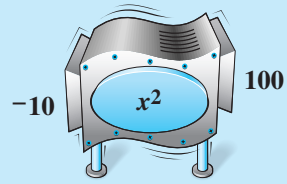
EJEMPLO

Considera la función $f(x) = x^2$.

Si $x = 3$, entonces $f(3) = 3^2 = 9$. Calcular $f(3)$ es como poner 3 dentro de esta máquina:



Si $x = -10$, entonces $f(-10) = (-10)^2 = 100$.



Recuerda, $f(2)$ no significa "f veces 2". Esto significa "usa 2 como la entrada para la máquina f" o "evalúa la función f con la entrada 2".

Serie de problemas F

La distancia que caen los paracaidistas, antes de abrir sus paracaídas es una función del tiempo desde que cayeron de un avión. La función se aproxima por $f(t) = 4.9t^2$, donde t es el tiempo en segundos y $f(t)$ es la distancia en metros.

1. ¿Qué representa $f(2)$ en una situación de paracaidismo? ¿Cuál es el valor numérico de $f(2)$?
2. ¿Cuánto ha caído un paracaidista después de 10 segundos?
3. En el contexto de esta situación, ¿tendría sentido calcular el valor de $f(-3)$? Explica tu respuesta.

Algunas funciones sólo pueden tener ciertas entradas. En el problema del paracaidista, sólo tienen sentido números positivos como entradas, porque la función mide cuánto ha caído el paracaidista *después* de saltar.

Como otro ejemplo, he aquí una función que consideraste anteriormente:

- Entrada: un entero
  Salida: clasificación como par o impar

La entrada se describe como "un entero" porque los no enteros, tales como $\frac{3}{4}$ y -12.92, no tienen sentido como entradas. No es razonable preguntar si tales números son pares e impares.

Datos de interés

De los capítulos anteriores podrías recordar que la ecuación $d = 16t^2$ también se puede usar para describir la distancia recorrida por un cuerpo que cae. Las ecuaciones $d = 16t^2$ y $d = 4.9t^2$ describen la misma relación, sólo que la distancia está en pies en la primera ecuación y en metros en la segunda.

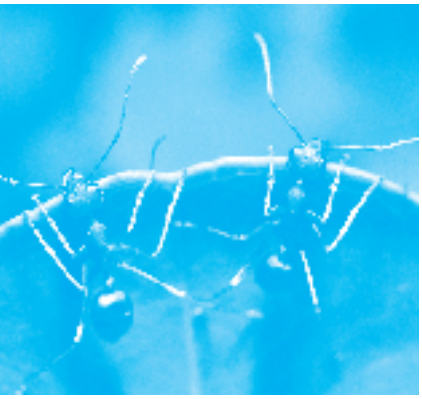
VOCABULARIO

dominio

El conjunto de entradas permisibles para una función se llama el **dominio** de la función. Si algunos números no son permitidos como entradas, decimos que *no están en el dominio* de la función.

Datos de interés

Las hormigas se encuentran en todo el mundo excepto en las regiones polares. Se estima que hay 10,000 especies diferentes de hormigas y 10 millones de billones de hormigas individuales.



Piensa & comenta

Considera esta función: $r(x) = \frac{1}{x}$.

¿Qué números no están en el dominio de esta función? ¿Por qué?

Serie de problemas G

En los Problemas 1 al 5, describe el dominio de la función.

1. $f(x) = x^2$

2. $g(t) = \sqrt{t}$

3. $R(x) = \frac{1}{1 - x}$

4. $e(n)$ es el número de factores de n.

5. $q(p)$ es *sí,* si p es exactamente divisible entre 3 y *no* si p no es exactamente divisible entre 3.

6. El número de patas en un hormiguero es una función del número de hormigas en el hormiguero. Específicamente, el número de patas es 6 veces el número de hormigas.

a. Si hay 2,523 hormigas en el hormiguero, ¿cuántas patas hay?

b. ¿Cuáles números no pueden ser entradas para esta función del "número de patas"? Explica tu respuesta.

c. Puedes describir esta función "número de patas" con símbolos algebraicos. Sea a el número de hormigas y escribe una función g de manera que $g(a)$ es el número de patas.

Comparte & resume

Una función particular se puede describir de varias maneras, inclusive con palabras, ecuaciones, tablas, gráficas y máquinas.

1. Describe, escribe o dibuja tres representaciones de esta función.

$$g(x) = 7 - 3x$$

2. ¿Hay algunos números que no están en el dominio de $g(x) = 7 - 3x$? Si es así, ¿qué números?

Investigación 3 Encuentra valores máximos de funciones

Las gráficas son muy útiles para encontrar los valores máximo y mínimo aproximados de las funciones. Por ejemplo, En el Capítulo 4, consideraste la máxima altura que podría alcanzar una pelota arrojada o rebotada. Un fabricante podría usar una función para predecir el precio que dará la máxima utilidad para un producto.

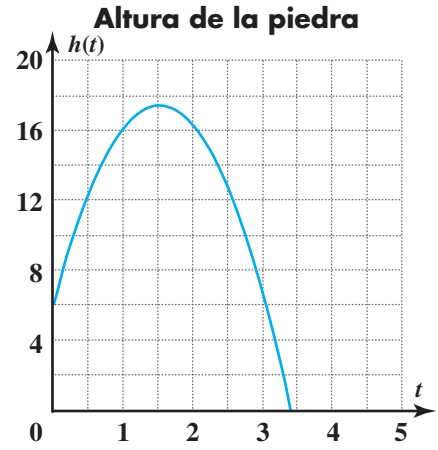
MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas H

Tala arrojó una piedra verticalmente desde la orilla de un muelle. La altura de la piedra arriba del nivel del agua es una función de *t,* donde *t* es el número de segundos después de que se arroja la piedra. La función, que mide altura en metros, es

$$h(t) = 15t - 4.9t^2 + 6$$

A la derecha se grafica esta relación.



1. Cuando la piedra parte de la mano de Tala, ¿cuál es su altura sobre el agua? Explica cómo puedes encontrar la respuesta a partir de la ecuación o la gráfica.
2. ¿Cuál es la altura del muelle? Explica por qué tu respuesta es razonable.
3. ¿Cuándo está la piedra a una altura de 15 metros?
4. ¿Entre qué tiempos esta la piedra a más de 15 metros sobre el agua?
5. ¿Cuál es la máxima altura, en metros, que alcanza la piedra?
6. ¿Aproximadamente cuánto tiempo después de que se arroja la piedra ésta alcanza su máxima altura?
7. Usa las funciones Trace y Zoom de tu calculadora, para una mejor aproximación de la altura máxima de la piedra. Encuentra la altura máxima a la centésimas de metro más cercana.

MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas

Una compañía que fabrica medicinas ha investigado la concentración de un anestésico local en el torrente sanguínea de un paciente. Encontraron que la concentración se puede calcular aproximadamente con la función

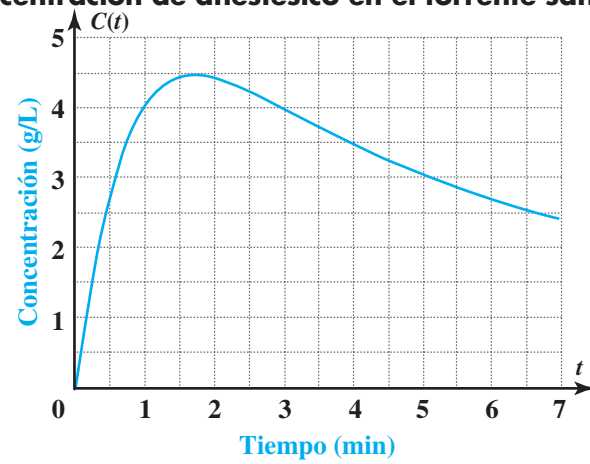
$$C(t) = \frac{21t}{t^2 + 1.3t + 2.9}$$

donde t es el número de minutos después de que se administra el anestésico y $C(t)$ es la concentración del anestésico, medido en gramos por litro. Una concentración más alta significa que es menos probable que el paciente sienta dolor.

1. Calcula $C(1)$, $C(6)$ y $C(10)$. ¿Qué representa cada uno de estos valores en términos de esta situación?

2. La gráfica muestra la relación entre $C(t)$ y t . Úsala para estimar la concentración máxima alcanzada por el anestésico.

Concentración de anestésico en el torrente sanguíneo



3. ¿Aproximadamente cuánto demora el anestésico en alcanzar la máxima concentración?

4. Usa la ecuación para dibujar tu propia gráfica en tu calculadora. Usa Zoom y Trace para calcular los Problemas 2 y 3 a la centésima más cercana de las unidades dadas (g/L y min).

5. Las muestras han demostrado que cuando la concentración alcanza 2 g/L, los pacientes reportan entumecimiento. ¿Aproximadamente cuánto tiempo después de la inyección sucede esto?

6. Un médico quiere suturar una herida en la mano de Jemma y cuenta con que la sutura tarde casi 3 minutos. ¿Cuánto tiempo debería esperar después de inyectar a Jemma con el anestésico antes de comenzar la sutura? Explica.

Datos de interés

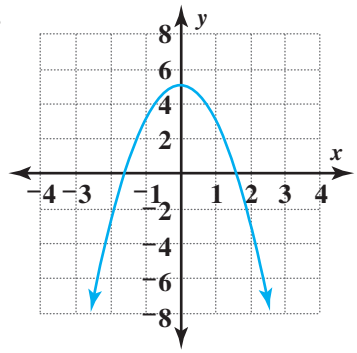
Hay *dos tipos de anestésicos*. Los *anestésicos generales* actúan en el sistema nervioso central y afectan el cuerpo entero volviendo inconscientes a los pacientes. Los *anestésicos locales* sólo afectan una parte particular del cuerpo donde se inyectan o aplican.

CONTENTS

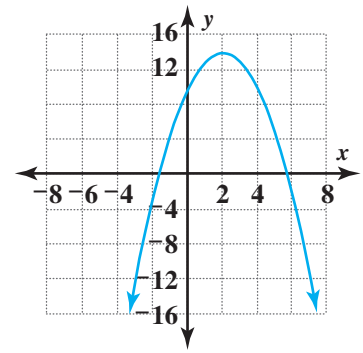
Comparte & resume

Decide si cada una de estas funciones tiene un valor máximo. Si es así, aproxima el valor máximo y la entrada que produce.

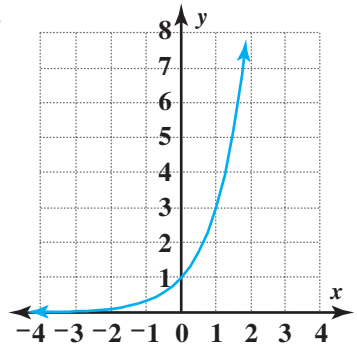
1.



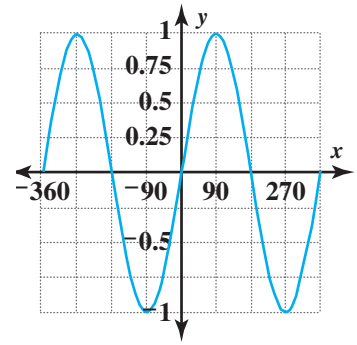
2.



3.

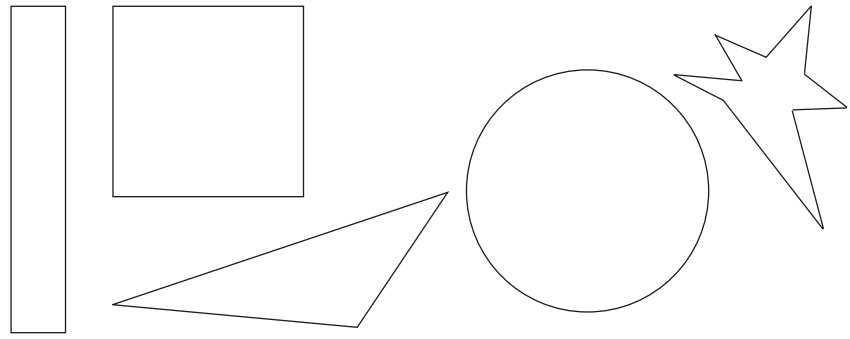


4.



Investigación 4 Áreas máximas, longitudes mínimas

Estas figuras tienen el mismo perímetro pero áreas diferentes.



Datos de interés

Los geómetras son matemáticos que se especializan en geometría.

A menudo, los granjeros, los constructores y los geómetras a menudo quieren maximizar el área de una forma para un perímetro dado. En esta investigación, considerarás el área máxima de forma rectangulares, con un perímetro dado. También considerarás el perímetro mínimo para un área dada.

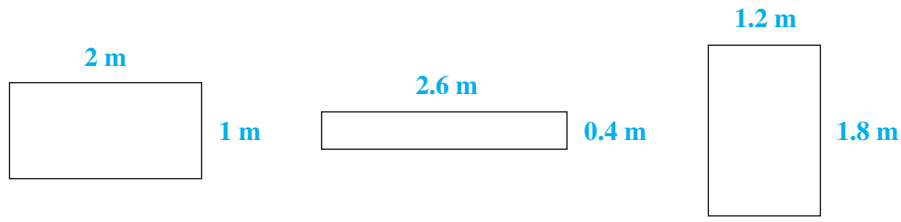
MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas J

Keisha y su hermana gemela Monifa compraron unos conejillos de Indias. Ellas están construyendo un corral cercado para los animales. Tienen 6 metros de cerca y quieren darle a sus mascotas el mayor espacio posible.

Keisha dibujó algunas formas rectangulares posibles para el corral.



1. Las gemelas necesitan considerar dos dimensiones para un corral rectangular: longitud y ancho. Copia y completa la tabla que relaciona las longitudes y los anchos posibles, ambos medidos en metros. El perímetro total debe ser 6 metros en cada caso.

Longitud	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Ancho	2.5	2				
Perímetro		6				

2. Si la longitud del rectángulo aumenta en cierta cantidad, ¿qué sucede con su ancho?

3. Escribe una ecuación que dé el ancho W para cualquier longitud L.

Tu ecuación muestra la relación entre una dimensión y la otra del corral rectangular. Sin embargo, debido a que Keisha y Monifa quieren determinar el área rectangular más grande que ellas pueden encerrar usando 6 metros de cerca. La relación matemática que necesitan es entre una de las dimensiones, tales como la longitud y el área.

4. Completa esta tabla, muestra las dimensiones y el área de algunos rectángulos posibles. Todas las medidas están en metros.

Longitud	0.5	1	1.5	2	2.5	3
Ancho	2.5					
Área	1.25					

5. Escribe una ecuación para la función A que da el área para la longitud L.

6. Usa tu calculadora para graficar la longitud del corral contra su área, con tu función para el Problema 5. Bosqueja tu gráfica. Recuerda rotular los valores máximo y mínimo de cada eje.

7. ¿De qué longitud y ancho debe ser el corral para producir la mayor área, a partir de 6 metros de corral? Usa la gráfica que dibujaste para aproximar tu respuesta.

Datos de interés

Los conejillos de Indias son oriundos de Sudamérica y viven un promedio de ocho años.

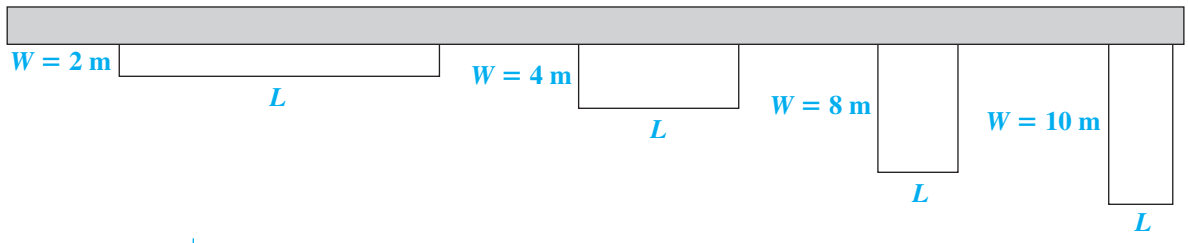
CONTENTS

MATERIALES

calculadora graficadora

Serie de problemas K

Una familia quiere construir un corral rectangular para sus pollos, con una pared de piedra, ya existente, como uno de los lados y cerca para los otros tres lados. Ellos decidieron hacerlo en un área de 40 m^2. Quieren saber qué forma de rectángulo dará a esta área una longitud mínima de cerca. He aquí algunas formas que están considerando.



1. Copia y completa la tabla. Si es necesario, intenta valores adicionales para el ancho, para determinar la menor cantidad de cerca requerida. Todas las medidas están en metros.

Ancho, *W*	2	4	8	10
Longitud, *L*				
Cantidad de cerca				

2. Expresa la longitud del corral en términos de *W*.

3. Usa tu expresión para el Problema 2 para escribir la cantidad de cerca como una función de *W*. Llama a tu función *F*.

$$F(W) = \_\_\_\_\_$$

4. Usa uno de los siguientes métodos para encontrar el ancho que requiere la menor cantidad de cerca:

- Usa tu calculadora para graficar la longitud de la cerca contra el ancho, usando tu función del Problema 3. Aproxima el menor valor para la longitud.
- Usa tu calculadora para suponer, verificar y mejorar.

MATERIALES

calculadora graficadora (opcional)

Comparte & resume

Héctor estaba experimentando con su calculadora, sumaba números positivos y sus recíprocos. Aquí hay unos ejemplos.

$$5 + \frac{1}{5} = 5.2 \qquad 0.1 + \frac{1}{0.1} = 10.1 \qquad 1.25 + \frac{1}{1.25} = 2.05$$

1. ¿Crees que haya un total mínimo que pueda producir haciendo esto? Si es así, ¿cuál es? Si no, explica por qué no. (Ayuda: Sea x el número y escribe una ecuación para expresar lo que está haciendo Héctor.)

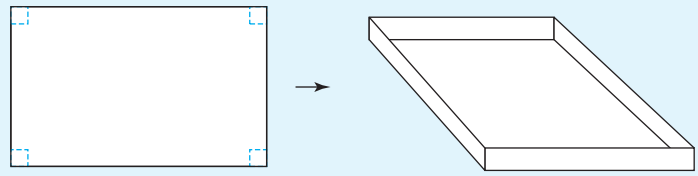
2. ¿Crees que haya un total máximo que él pueda producir? Si es así, ¿cuál es? Si no, explica por qué no.

Investigación de laboratorio ▶ La caja más grande

MATERIALES

- tarjetas de 5 por 8 pulgadas
- regla
- tijeras
- calculadora graficadora
- cinta adhesiva

Tu maestro te dará tarjetas de 5 por 8 pulgadas. Puedes cortar cuadrados de las esquinas de la tarjeta y después doblar los lados para hacer una caja abierta (una caja sin tapa).



Debes hacer la caja con el mayor volumen posible.

Pruébalo

El volumen de tu caja dependerá de la longitud de los lados de los cuadrados que cortes.

1. Usa el método anterior para intentar crear una caja con el mayor volumen posible. Ten cuidado de cortar cuadrados del *mismo tamaño* en cada esquina. Anota las longitudes de los lados de los cuadrados que recortes, de manera que las puedas consultar más tarde.

2. Compara el volumen más grande que encontraste con el volumen más grande que encontraron otros en la clase. Anota la longitud de los lados de los cuadrados recortados de las cajas con el volumen más grande.

Recuerda

Para un prisma rectangular como una caja, el volumen es el área de la base por la altura.

Analiza la situación

3. Cada dimensión en tu caja depende de la longitud de los lados de los cuadrados que cortes. Copia y completa la tabla para cuadrados de diferentes longitudes laterales. Todas las dimensiones están en pulgadas.

Longitud lateral del cuadrado	0	0.5	1	1.5	2	2.5
Altura de la caja	0					
Longitud de la caja	8					
Ancho de la caja	5					

4. Agrega una fila a tu tabla, para calcular el volumen de la caja de cada longitud lateral del cuadrado. De las cajas enumeradas en la tabla, ¿cuál tiene el volumen más grande?

Por supuesto, hay más tamaños posibles para los cuadrados que los seis enumerados en la tabla anterior. Puedes usar funciones y gráficas para ayudarte a verificar *todas* las posibilidades.

5. Si la longitud lateral del cuadrado que cortaste es x, calcula cada una de las siguientes en términos de x.

a. la altura de la caja

b. la longitud de la caja

c. el ancho de la caja

d. el volumen de la caja

6. Basado en tu respuesta de la Parte d de la Pregunta 5, escribe una ecuación para la función que relaciona el volumen de la caja con la longitud lateral del cuadrado que cortaste. Llama v a tu función.

7. Usa tu calculadora para graficar la función del volumen y bosqueja la gráfica. Después usa Zoom y Trace para estimar el valor de x que da el volumen máximo.

¿Qué has aprendido?

Estimaste el volumen máximo de la caja abierta que puedes hacer de una tarjeta de 5 por 8 pulgadas. Supón que en vez de eso comienzas con una hoja estándar de papel, 8.5 por 11 pulgadas.

8. Usa lo que aprendiste en esta investigación de laboratorio para responder a estas preguntas. Muestra tu trabajo, incluyendo los bosquejos de cualquier gráfica que hagas.

a. ¿Qué tamaño de corte maximizará el volumen para una caja abierta hecha de una hoja estándar de papel?

b. ¿Cuál es el volumen más grande posible?

9. Usa una hoja ordinaria de papel y tus respuestas a la Pregunta 8 para crear la caja que piensas que tiene el volumen mayor. Pega las esquinas con cinta para hacerla resistente.

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Considera esta máquina de funciones.

a. Si la entrada es 10, ¿cuál es la salida?

b. Si la entrada es $-\frac{2}{3}$, ¿cuál es la salida?

c. Si la entrada es 1.5, ¿cuál es la salida?

d. Si la entrada es algún número x, ¿cuál es la salida?

e. Si la salida es -9, ¿cuál es la entrada?

f. Supón que quieres una máquina de funciones que anule esta máquina. Es decir, si primero pones un número a través de la máquina "$\div$ 2" y después a través de tu nueva máquina, ésta *siempre* regresa tu número original. ¿Qué máquina de funciones logrará esto?

2. Considera esta máquina de funciones, que eleva al cuadrado la entrada.

a. Si la entrada es $\frac{4}{3}$, ¿cuál es la salida?

b. Si la entrada es $-\frac{4}{3}$, ¿cuál es la salida?

c. Si la salida es 9, ¿cuál es la entrada?

d. Supón que quieres una máquina de funciones que anule esta máquina. Es decir, si primero pones un número a través de la máquina elevar "al cuadrado" y después a través de una nueva máquina, siempre produce tu número original. ¿Qué máquina de funciones logrará esto?

3. Considera esta conexión, Función F.

Función F

a. Si la entrada es 1.5, ¿cuál es la salida?

b. Si la entrada es $^{-}3$, ¿cuál es la salida?

c. Si la entrada es 11, ¿cuál es la salida?

d. Si la entrada es cualquier número *x*, ¿cuál es la salida?

e. Si la salida es $^{-}8$, ¿cuál es la entrada?

f. Supón que quieres una máquina de funciones que anule esta máquina. O sea, si pones un número a través de la máquina de Función F y después a través de tu nueva conexión, siempre producirá tu número original. ¿Qué máquina de funciones logrará esto?

Datos de interés

Varios millones de personas juegan rugby en más de 100 países.

Menciona si cada ejemplo a continuación es una función y explica cómo lo decidiste.

4. Entrada: un círculo
Salida: la razón de la circunferencia al diámetro

5. Entrada: un equipo de rugby
Salida: un miembro del equipo

6. Entrada: un CD
Salida: una canción del CD

Determina si la relación que representa cada tabla de entrada/salida podría ser una función.

7.

Entrada	Salida
-3	4
-2	3
-1	2
0	1
1	0
2	-1
3	-2

8.

Entrada	Salida
-3	0
-2	-2.828 y 2.828
-1	-2.236 y 2.236
0	-3 y 3
1	-2.236 y 2.236
2	-2.828 y 2.828
3	0

9.

Entrada	Salida
-3	$\frac{1}{3}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	indeterminado
1	1
2	$\frac{1}{2}$
3	$\frac{1}{3}$

10. Considera esta regla: *Eleva un número al cuadrado, réstale 2 y después divídelo entre 2.*

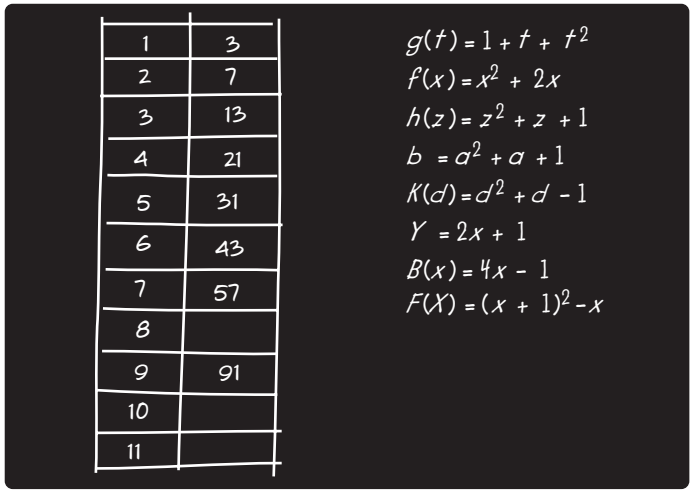
a. Copia y completa la tabla con esta regla.

b. Traza una gráfica de la relación que se muestra en la tabla.

c. ¿Es esta regla una función? ¿Cómo lo sabes?

Entrada, I	Salida, O
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	

11. Cuando Kai entró a la clase de matemáticas, la siguiente tabla de funciones estaba en la pizarra. Kai pensó que los valores en la primera columna de la tabla eran entradas de funciones y que los valores de la segunda columna eran salidas.



a. ¿Cuál de las funciones, si la hay, se podría mostrar en la tabla? Explica.

b. Completa la tabla calculando los valores faltantes de la función.

12. Ciencia física Una piedra cae desde la orilla de un acantilado a 600 metros de altura. La distancia, en metros, en que cae la roca es una función del tiempo en segundos y se puede aproximar con la función $s(t) = 4.9t^2$.

a. Calcula el valor de $s(8)$. En esta situación, ¿qué representa $s(8)$?

b. ¿Qué distancia ha caído la piedra después 9 segundos? ¿Después de 10 segundos?

c. ¿Cuándo golpea la piedra en el suelo?

d. ¿Cuál es el dominio de la función $s(t) = 4.9t^2$ en este contexto?

Describe el dominio de cada función.

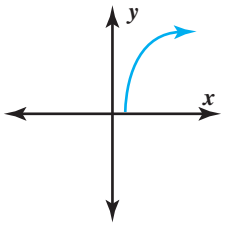
13. $f(x) = 2^x$

14. $g(x) = \frac{1}{x+1}$

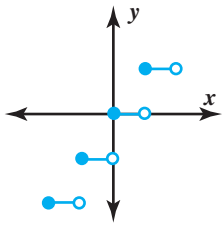
15. $h(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1}$

16. ¿Cuáles de las siguientes no son gráficas de funciones? Explica cómo lo sabes.

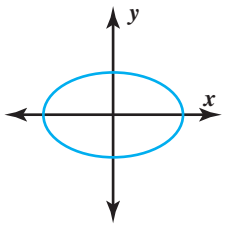
a.



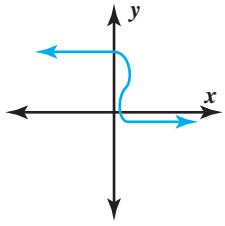
b.



c.



d.



17. Supón que una persona arroja una piedra en línea recta hacia arriba, de manera que su altura h, en metros, viene dada por la función $h(t) = 6 + 20t - 4.9t^2$, donde t es el tiempo en segundos desde que suelta la piedra.

a. Calcula $h(4)$. ¿Qué representa esto en esta situación?

b. Calcula la altitud de la piedra después de 3 segundos.

c. Traza una gráfica de la altitud de la piedra en el tiempo.

d. Usa tu gráfica para aproximar la altitud máxima de la piedra. ¿Cuánto tarda la piedra en alcanzar esta altitud?

18. Economía La fiambrería ABC Deli vende emparedados de varios tipos, todos al mismo precio. La utilidad semanal de este pequeño negocio es una función del precio de sus emparedados. Esta relación entre la utilidad, P, en cientos de dólares y el precio por emparedado, s, en dólares viene dado por la ecuación:

$$P(s) = {}^{-}s(s - 7)$$

a. Completa la tabla para esta función.

s	$P(s)$
0	0
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

b. Explica el significado de (7, 0) en términos de la utilidad de la fiambrería.

c. Extiende tu tabla para buscar el precio del emparedado que produzca la máxima utilidad.

d. ¿Cuál es la máxima utilidad que este negocio puede esperar en una semana?

Calcula el valor máximo para cada función y después determina el valor de entrada que produce ese valor máximo.

19. $f(t) = 200t - 5t^2$

20. $k(t) = 4 + 4t - 4t^2$

21. Marcus le dio a su hermano pequeño una tira de cartón de 8 metros, para hacer un fuerte rectangular para sus soldados de juguete.

a. Copia y completa la tabla que relaciona las longitudes y anchos posibles para el fuerte.

Longitud (m)	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5
Ancho (m)							
Perímetro (m)							

b. Escribe una ecuación para la función que dé el ancho para cualquier longitud L. Llama W a la función.

c. Ahora agrega una fila a tu tabla, que muestre el área de algunos rectángulos posibles.

d. Escribe una ecuación para la función A que dé el área para la longitud L.

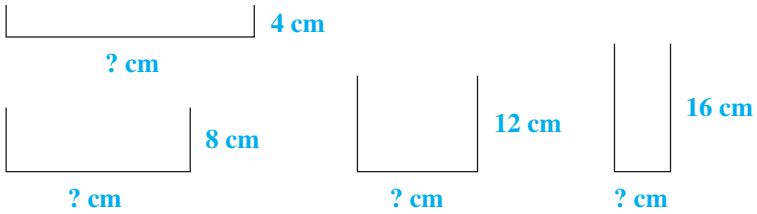
e. Usa tu función de la Parte d para bosquejar una gráfica para el área del fuerte en términos de su longitud.

f. ¿Qué dimensiones dan el área más grande para el fuerte?

22. Geometría Las canaletas de techo están diseñadas para conducir el agua de lluvia lejos del techo de una casa, para protegerla de un exceso de humedad.

Si cortas una canaleta y observas su vista lateral, puedes ver una *sección transversal.* Aquí hay algunas secciones transversales de las canaletas.

Nicky's Metalworks quiere producir algunas canaletas a partir de un rollo de metal de 39 cm de ancho. Ellos quieren que las canaletas tengan lados verticales. Nicky dibujó algunas secciones transversales posibles.



a. Para evitar que las canaletas se derramen durante lluvia fuerte, la compañía quiere que tengan el área de sección transversal lo más grande posible. Copia y completa la tabla para mostrar los anchos y las áreas para las canaletas de varias alturas.

Altura (cm), *h*	4	8	12	16
Ancho (cm), *w*				
Área (cm^2), *A*				

b. Determina una fórmula para el ancho w en términos de la altura h.

c. Escribe una ecuación para el área de la sección transversal A, como una función de h.

d. Traza una gráfica de la función del área.

e. Estima la altura de la canaleta que da el área más grande.

Conecta & amplía

23. Crea una máquina de funciones que produzca una salida de 3 más que el doble de cada entrada.

24. Crea una máquina de funciones que produzca una salida de 1 menos que un tercio de cada entrada.

25. Crea una máquina de funciones que devuelva un número impar para cada entrada de un número entero.

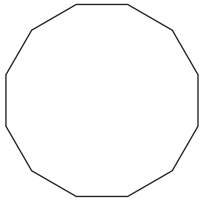
26. **Ciencia física** Piensa en la relación entre la temperatura de una taza de café caliente y el tiempo (en minutos), desde que se vertió el café.

a. Traza una gráfica sobre cómo crees que luciría la relación entre temperatura y tiempo (Ayuda: Piensa en la tasa a la que se enfría el café. ¿Se enfría más rápido al principio?)

b. ¿Es esta relación una función? Si es así, explica por qué.

27. **Geometría** La suma de los ángulos interiores de un polígono es una función del número de lados que tiene el polígono. Por ejemplo, la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°, de un cuadrado es 360°, de un pentágono es 540° y de un hexágono es 720°.

a. ¿Cuál es la suma de los ángulos interiores de un polígono con 12 lados (un dodecágono)? Usa el patrón en la suma de los ángulos para los polígonos mencionados anteriormente.



b. Escribe una ecuación para la función que relacione el número de lados para la suma de ángulos. Llama g, a la función y usa s para representar el número de lados.

c. ¿Cuál es el dominio de esta función? Explica tu respuesta.

En tus propias palabras

Da un ejemplo de una función que se pueda describir mediante una ecuación algebraica y un ejemplo de una función que no se pueda. Explica cómo sabes que ambos de tus ejemplos son funciones.

Reto En los Ejercicios 28 al 30, escribe una ecuación para una función f que *no* tenga los números dados en su dominio.

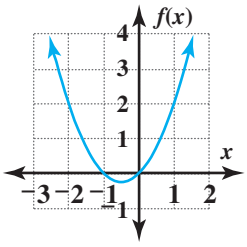
28. 3 y -3

29. números negativos

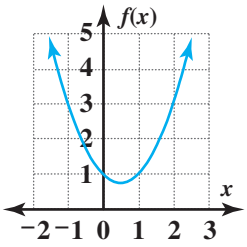
30. números positivos

Usa la gráfica dada y una tabla de valores, si es necesario, para calcular el valor mínimo de cada función y la entrada que la produce.

31. $f(x) = x + x^2$



32. $f(x) = 1 - x + x^2$



33. Puedes pensar en una *sucesión* como una función para la que las variables de entrada son los números naturales (1, 2, 3, 4, . . .). Por ejemplo, la sucesión de números pares enteros mayores que cero (2, 4, 6, 8, . . .) se puede dar con la función $f(n) = 2n$, donde 1, 2, 3, 4, . . . son las entradas.

a. Enumera los primeros siete términos de la sucesión descrita por la función $g(n) = \frac{1}{2^n}$, con n comenzando en 1.

b. Suma los primeros cinco términos de esta sucesión.

c. Suma los primeros seis términos de esta sucesión.

d. Suma los primeros siete términos de esta sucesión.

e. Supón que sumaras *todos* los términos de esta sucesión para un valor grande de n, como 100 términos. ¿Piensas que la suma de esta sucesión se acerca a un valor en particular o piensas que aumenta indefinidamente?

34. La suma de dos números es 1. ¿Cuál es el valor máximo de su *producto*? Explica.

35. Economía Una compañía que fabrica lápices de carbón para artistas ha decidido rediseñar las cajas de envío para los lápices. Los lápices tienen forma de prismas rectangulares, con una base de 0.25 por 0.25 de pulgada y una longitud de 8 pulgadas. El fabricante piensa embalar una docena de lápices en cada caja.

a. Calcula el volumen de un lápiz. Después calcula el volumen que debe contener cada caja, o sea, determina el volumen de 12 lápices.

b. Una dimensión de la caja debe ser la longitud de los lápices, 8 pulg. Usando x, y y 8 como las dimensiones de la caja, escribe una fórmula para el volumen que puede contener la caja.

c. Usa el volumen total de 12 lápices, junto con tu fórmula de la Parte b, para escribir una ecuación para y en términos de x.

La compañía quiere usar tan poco cartón como sea posible para hacer las cajas.

d. Escribe una fórmula para el área superficial S de la caja usando sólo x como la variable de entrada. Ignora el área de las solapas que mantienen unida la caja. (Ayuda: Puedes escribirla primero con x y y, después reemplaza y por una expresión en términos de x.)

e. Haz una tabla de valores que dé el área superficial de una caja de valores diferentes de x. Como los lápices tienen un ancho de 0.25 de pulgada, las dimensiones de la caja deben ser múltiplos de 0.25 de pulg, por ejemplo, 0.25 de pulg, 0.5 pulg y 0.75 de pulg.

f. ¿Qué dimensiones debería tener la caja si usa la mínima cantidad de cartón?

Repaso mixto

Recuerda

Una traslación es una transformación que mueve una figura cierta cantidad, en una dirección específica. No cambia el tamaño de la figura ni su orientación.

Elabora y resuelve una proporción para responder a cada pregunta.

36. ¿De qué número es 32.2 el 92%?

37. ¿Qué por ciento de 125 es 90?

38. ¿Cuál es el 81% de 36?

Escribe cada expresión en la forma 7^b.

39. $\frac{7^{23}}{7^{15}}$ **40.** $(7^3)^{10}$ **41.** $\left(\frac{1}{7}\right)^{11}$

42. Una regla para trasladar una figura en una cuadrícula de coordenadas (x, y) a las imágenes de las coordenadas $(x - 2, y + 3)$. En una cuadrícula de coordenadas, muestra el vector de traslación para esta regla.

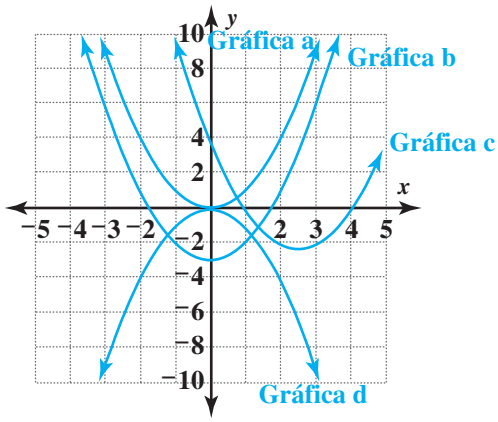
Relaciona cada ecuación con una de las gráficas.

43. $y = x^2 - 3$

44. $y = {}^{-}x^2$

45. $y = x^2$

46. $y = x^2 - 5x + 4$



Vuelve a plantear cada expresión como un cuadrado con una constante sumada o restada.

47. $x^2 + 12x + 17 = x^2 + 12x + 36 - \_\_\_ = (x + 6)^2 - \_\_\_$

48. $k^2 - 14k + 70$

49. $b^2 + 5b - \frac{3}{4}$

50. **Geometría** Este es un mapa del parque Golden Gate en San Francisco.

a. Calcula el área del parque en este mapa, en pulgadas cuadradas. (Ayuda: El parque es muy parecido a un rectángulo. ¿Cuáles son las longitudes de los lados?)

b. El área del parque Golden Gate es aproximadamente 1,017 acres, o casi 1.59 millas cuadradas. Determina el factor de escala entre este mapa y el parque real. (Ayuda: Un factor de escala es una comparación de las misma unidades lineales, no cuadradas.)

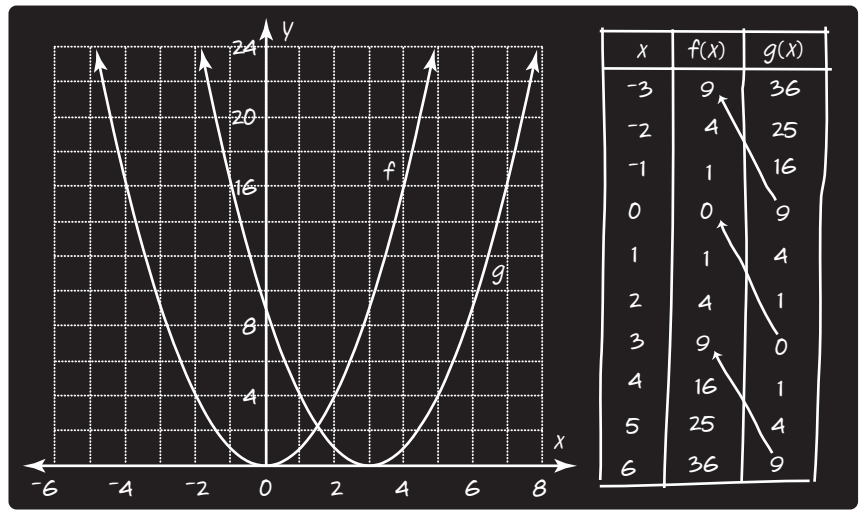
c. ¿Aproximadamente cuántas millas de largo tiene la frontera norte (arriba) del parque Golden Gate, a lo largo de la calle Fulton?

Recuerda

Hay 5,280 pies en 1 milla y 12 pulgadas en 1 pie.

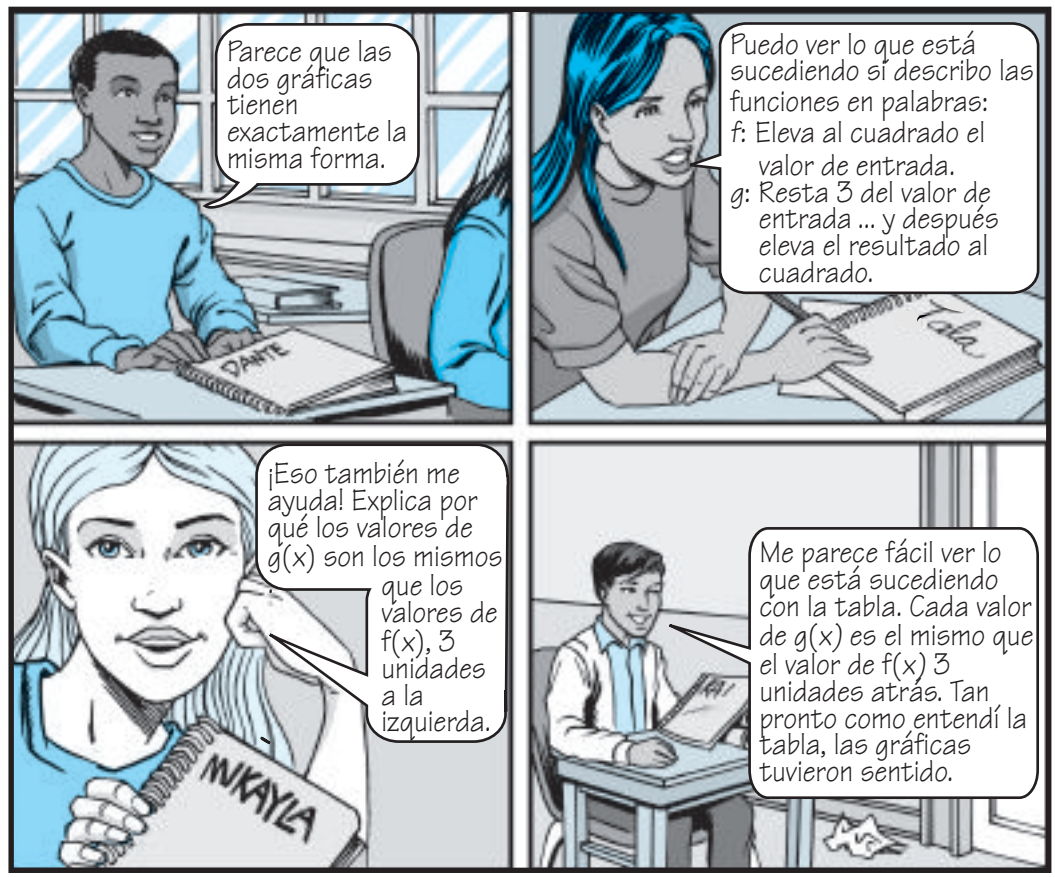
8.2 Gráficas de funciones

La Srta. Torres dibujó las siguientes gráficas y tabla para demostrar a su clase que las gráficas de $f(x) = x^2$ y $g(x) = (x - 3)^2$ están relacionadas.



x	$f(x)$	$g(x)$
-3	9	36
-2	4	25
-1	1	16
0	0	9
1	1	4
2	4	1
3	9	0
4	16	1
5	25	4
6	36	9

La Srta. Torres después preguntó a la clase por qué las gráficas se veían así.


Parece que las dos gráficas tienen exactamente la misma forma.
DANTE
Puedo ver lo que está sucediendo si describo las funciones en palabras:
f: Eleva al cuadrado el valor de entrada.
g: Resta 3 del valor de entrada ... y después eleva el resultado al cuadrado.
Tabla
¡Eso también me ayuda! Explica por qué los valores de g(x) son los mismos que los valores de f(x), 3 unidades a la izquierda.
NIKAYLA
Me parece fácil ver lo que está sucediendo con la tabla. Cada valor de g(x) es el mismo que el valor de f(x) 3 unidades atrás. Tan pronto como entendí la tabla, las gráficas tuvieron sentido.

MATERIALES
- papel de calcar
- calculadora graficadora

Recuerda
Una traslación es una transformación que mueve una figura una cantidad específica en una dirección específica. No cambia ni el tamaño ni la orientación de la figura.

Piensa & comenta

¿Cuál de los cuatro comentarios de los estudiantes encuentras más útil para entender por qué las gráficas se ven así? Explica.

Describe en tus propias palabras por qué parece razonable que las gráficas de $g(x) = (x - 3)^2$ estén tres unidades a la derecha de la gráfica $f(x) = x^2$.

Traza la gráfica de $f(x) = x^2$. Pon tu trazo sobre la gráfica de $g(x) = (x - 3)^2$, alineando las parábolas. ¿Son congruentes las parábolas?

La gráfica de $g(x) = (x - 3)^2$ se relaciona con la de $f(x) = x^2$ por una translación. ¿Cuál es la dirección y distancia de la traslación?

Predice cómo lucirá la gráfica de $h(x) = (x + 4)^2$. Verifica tu predicción al graficar con tu calculadora.

¿Se relaciona por una traslación la gráfica de h con la gráfica de f? Si es así, especifica la dirección y la distancia de la traslación.

Investigación 1 Compara gráficas de funciones

En esta investigación, explorarás conjuntos de funciones relacionadas.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas A

Para los Problemas 1 y 2, haz las Partes a, b y c. Trabaja en parejas o grupos de cuatro. Tu grupo necesitará dos calculadoras graficadoras, una para cada problema.

a. Grafica las cuatro ecuaciones en la misma ventana, y haz un bosquejo rápido de las gráficas. No borres tus gráficas para el Problema 1 cuando continúes con el Problema 2, necesitarás ambos conjuntos para el Problema 3.

b. Describe en qué se parecen y diferencian las cuatro gráficas en el conjunto. Usa el concepto de traslación en tus comparaciones.

c. Escribe ecuaciones para dos funciones más que pertenezcan al conjunto.

1. $j(x) = (x + 1)^2$
$f(x) = x^2$
$g(x) = (x - 1)^2$
$h(x) = (x - 2)^2$

2. $j(x) = \frac{1}{x + 1}$
$f(x) = \frac{1}{x}$
$g(x) = \frac{1}{x - 1}$
$h(x) = \frac{1}{x - 2}$

3. Describe en qué se parecen y diferencian los dos conjuntos de gráficas.

4. ¿En qué gráfica encontrarías el punto (4, 9)? Explica.

Recuerda
Cuando hagas gráficas en tu calculadora, rotula las gráficas con sus nombres (tales como j, f, g, h) y rotula los valores mínimos y máximos en cada eje.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas B

Trabaja en parejas o grupos de cuatro para este conjunto de problemas.

1. Considera la función $f(x) = 2^x$.

a. Escribe ecuaciones para tres funciones g, h y j, de manera que sus gráficas tengan la misma forma que la gráfica de f, pero

i. g se traslada 2 unidades a la derecha de f.

ii. h se traslada 3 unidades a la derecha de f.

iii. j se traslada 3 unidades a la izquierda de f.

b. Grafica las cuatro funciones en la misma ventana y haz un bosquejo rápido de las gráficas.

2. Considera la función $f(x) = 2x^2$.

a. Escribe ecuaciones para tres funciones g, h y j, de manera que sus gráficas tengan la misma forma que la gráfica de f, pero

i. g se traslada 1 unidad a la derecha de f.

ii. h se traslada 2 unidades a la izquierda de f.

iii. j se traslada 3 unidades a la derecha de f.

b. Grafica las cuatro funciones en la misma ventana y haz un bosquejo rápido de las gráficas.

3. ¿En qué gráficas de los Problemas 1 y 2 encontrarías el punto $(^-3, 1)$? Explica cómo determinaste tu respuesta.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas C

Vuelve a trabajar en parejas o grupos de cuatro. Tu grupo requerirá dos calculadoras graficadoras. Para los Problemas 1 y 2, haz las Partes a, b y c.

a. Grafica las cuatro ecuaciones en la misma ventana y haz un bosquejo rápido de tus gráficas, recordando rotularlas. No borres tus gráficas del Problema 1 cuando continúes con el Problema 2.

b. Describe en qué se parecen y diferencian las cuatro gráficas. Usa el concepto de traslación en tus comparaciones.

c. Escribe dos funciones más que pertenezcan al conjunto.

1. $j(x) = 2^x - 1$

$f(x) = 2^x$

$g(x) = 2^x + 1$

$h(x) = 2^x + 2$

2. $j(x) = \frac{1}{x} - 1$

$f(x) = \frac{1}{x}$

$g(x) = \frac{1}{x} + 1$

$h(x) = \frac{1}{x} + 2$

3. Describe en qué se parecen y en qué se diferencian los dos conjuntos de gráficas.

4. ¿En qué gráfica encontrarías el punto $\left(3, \frac{4}{3}\right)$? Explica.

Comparte & resume

1. Supón que tienes la gráfica de una función *f*. Usas la regla de *f* para crear una nueva función *g* pero reemplazas la variable *x* por la expresión $x + h$, para una constante *h*. Si $f(x) = 2x$, por ejemplo, puedes reemplazar *x* por $x + 3$ para obtener $g(x) = 2(x + 3)$. Si $f(x) = 3x^2 - 2$, puedes reemplazar *x* por $x - 5$ para obtener $g(x) = 3(x - 5)^2 - 2$.

Escribe un enunciado o dos que describan las diferencias y semejanzas entre las gráficas de *f* y *g*. Haz bosquejos como ayuda para tu explicación.

2. Supón que creas una función *g* al sumar una constante *h* a *f*, por ejemplo, $f(x) = 2x$ y $g(x) = 2x + 3$ ó $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 3x^2 - 7$. Describe las diferencias y semejanzas entre las gráficas de *f* y *g*. Incluye los bosquejos.

3. Supón que quieres saber si el punto(a, b) esté en la gráfica de una función. ¿Cómo lo podrías averiguar?

Investigación 2 Trabaja con gráficas

Anteriormente viste que los valores máximo o mínimo de una función cuadrática se pueden encontrar al observar el vértice de su gráfica, que es una parábola. También aprendiste que las parábolas son *simétricas,* éstas se pueden doblar en el eje de simetría, de tal manera que los dos lados coincidan.

Ahora examinarás las conexiones entre la gráfica y la ecuación de una función cuadrática. También aprenderás lo qué es el rango de una función y cómo se relaciona con el punto máximo o mínimo.

Piensa & comenta

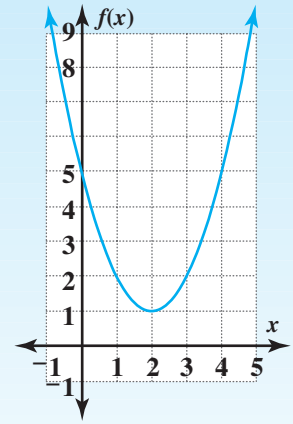
Observa esta gráfica de $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.
Encuentra los valores de x para los que

$f(x) = 1$ $f(x) = 2$ $f(x) = 5$

Encuentra los valores de x para los que

$f(x) = 0$ $f(x) = {}^-1$ $f(x) = {}^-5$

Describe todos los valores posibles para $f(x)$.



Describe todos los valores para los que $f(x)$ nunca podrá ser.

VOCABULARIO
rango

Todos los valores posibles de *salida* para una función f son el **rango** de la función. Para la función graficada anteriormente, el rango es $f(x) \geq 1$. Sin importa lo que substituya a x, el valor de $f(x)$ siempre será mayor que o igual a 1, y cada valor mayor o igual a 1 tienen un valor de entrada. Los números menores a 1 no están en el rango de $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.

Datos de interés

Un biólogo podría necesitar saber el rango de una función que modela la temperatura de un cuerpo de agua en el tiempo, para estudiar cómo afecta la temperatura del agua a un organismo que viva allí.

CONTENTS

MATERIALES

calculadora graficadora (opcional)

Serie de problemas D

Para cada función, especifica el dominio (entradas posibles) y el rango (salidas posibles). Para algunas funciones, te puede ayudar hacer una gráfica con una calculadora.

1. $g(x) = 4^{x+2}$ (Ayuda: ¿Puede $g(x)$ ser negativa? ¿Cero?)

2. $h(s) = \frac{1}{s+3}$

3. $c(x) = {}^{-}3x + 4$

4. Entrada: un estado
Salida: la capital del estado

5. Entrada: un número
Salida: la parte entera de ese número (Por ejemplo, si la entrada es 4.5, la salida es 4; si la entrada es $^{-}3.2$, la salida es $^{-}3$.)

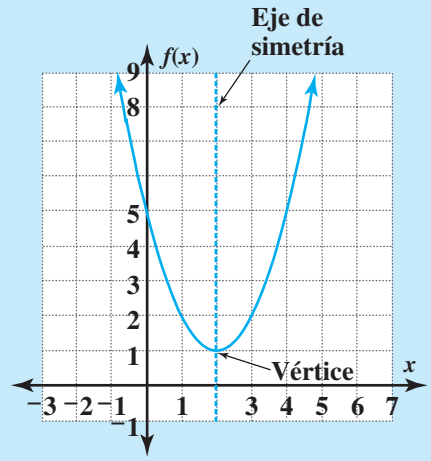
No siempre es fácil determinar el rango de una función. Puedes intentar unos cuántos valores lógicos y realizar unas conclusiones de las salidas, o puedes graficar la función. En la Serie de problemas E, verás cómo se relaciona el rango de una función cuadrática con su vértice. Para comenzar, considera cómo encontrar el vértice.

Recuerda

Una parábola tiene su valor máximo o mínimo en el vértice.

EJEMPLO

Esta gráfica es de la función $f(x) = (x - 2)^2 + 1$.



Para esta parábola, el eje de simetría es la línea $x = 2$.

El punto retorno, o *vértice,* es el punto de la gráfica donde$x = 2$. Cuando $x = 2$, $f(x) = (2 - 2)^2 + 1 = 1$, de manera que el vértice tiene las coordenadas (2,1).

MATERIALES

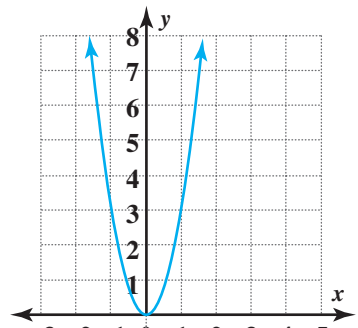
calculadora graficadora

Serie de problemas E

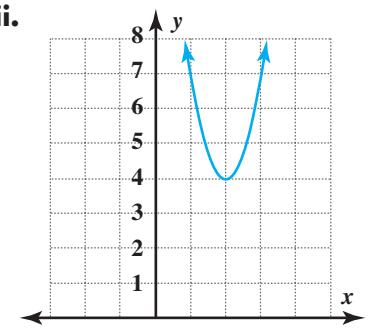
1. A continuación están las gráficas de estas funciones.

$f(x) = 3x^2$ $\qquad$ $g(x) = 3(x - 2)^2 + 4$

i.



ii.



a. Sin usar tu calculadora, decide qué gráficas representan qué funciones.

b. Bosqueja las gráficas y dibuja el eje de simetría para cada una.

c. ¿Cuál es el vértice de cada gráfica?

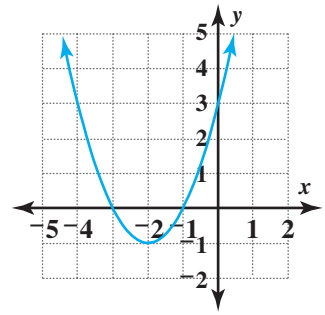
d. Especifica el rango de cada función.

e. ¿Cómo se relaciona el rango de una función con el vértice?

Recuerda

El *rango* es el conjunto de todas las posibles salidas para una función.

2. Considera esta gráfica.



a. ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica? ¿Cuál es su vértice?

b. ¿Cuáles de estas funciones representa la gráfica? Explica cómo lo sabes.

$f(x) = (x + 2)^2 + 1$ $\qquad$ $g(x) = (x + 2)^2 - 1$

$h(x) = {}^{-}(x - 2)^2 + 1$ $\qquad$ $i(x) = (x - 2)^2 - 1$

c. Para cada función en la Parte b, específica el rango y el vértice.

d. ¿Cómo se relaciona el rango al punto máximo o mínimo de una función?

3. Responde a estas preguntas sobre la función $f(x) = (x - 3)^2 - 1$ sin dibujar una gráfica.

a. ¿Cuál es el eje de simetría?

b. ¿Cuál es el vértice?

4. Una parábola tiene un vértice en el punto (3, 4).

a. Escribe una ecuación para una función cuadrática, cuya gráfica tiene este vértice. Grafica para verificar tu respuesta.

b. ¿Hay otras parábolas en este vértice? Si las hay, menciona dos más. ¿Cuántas hay?

5. Supón que tienes gráficas de estas funciones cuadráticas.

$$f(x) = (x - h)^2 + k \qquad g(x) = x^2$$

a. ¿Cómo se relaciona la gráfica de f con la gráfica de g?

b. ¿Cuál es el vértice de g? ¿Cuál es el vértice de f?

Las chispas de una antorcha de soldador viajan en trayectorias con forma de parábolas (ignorando el efecto del viento y otros factores).

Cuando una función cuadrática se escribe en una forma como

$$f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$$

puedes predecir el eje de simetría y el vértice de la parábola sin dibujar una gráfica.

Es más difícil visualizar la gráfica cuando la función cuadrática se escribe en una forma como

$$f(x) = 2x^2 - 12x + 19$$

En este caso, es útil volver a escribir la función al completar el cuadrado, como lo hiciste en el Capítulo 7.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas F

Para cada función, haz las Partes a, b, c y d.

a. Completa el cuadrado para volver a escribir $f(x) = ax^2 + bx + c$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b. Encuentra el eje de simetría de la gráfica f.

c. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

d. Usa la forma rescrita de la función para bosquejar su gráfica. Verifícalo con una calculadora graficadora.

1. $f(x) = x^2 + 8x + 7$

2. $f(x) = {}^-x^2 + 4x + 1$ (Ayuda: Primero factoriza el $^-1$.)

3. $f(x) = x^2 - 6x - 3$

Comparte & resume

Describe la relación entre el rango de una función cuadrática y el vértice de la parábola a la que se relaciona.

Investigación 3 Usa intersecciones x

VOCABULARIO
intersección x

Recuerda que el valor y en el que una gráfica cruza el eje y se llama la intersección y. De la misma manera, los valores de x en los cuales una gráfica cruza el eje x se llaman **intersecciones x.**

Piensa & comenta

¿Cómo se relacionan las intersecciones x de una gráfica de una función f con las soluciones de $f(x) = 0$? Por ejemplo, ¿cómo se relaciona la intersección x de $f(x) = 3x + 7$ con la solución de $3x + 7 = 0$?

Sin hacer una gráfica, calcula la intersección x de estas funciones:

$$h(x) = (3x + 1)(x - 4) \qquad j(x) = x^2 - 7x - 18$$

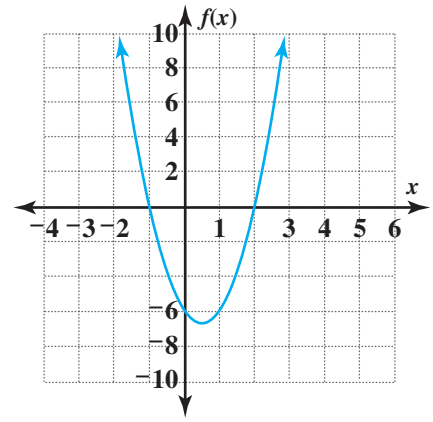
Ahora explorarás cómo se relacionan algunas intersecciones x de una función cuadrática entre ellas y con el eje de simetría de una parábola.

MATERIALES

geoespejo

Serie de problemas G

La gráfica muestra la función $f(x) = 3x^2 - 3x - 6$.



1. Estima las intersecciones x de f.
2. Encuentra el eje de simetría.
3. A cada lado del eje de simetría hay una intersección x. Usa tu geoespejo para encontrar la reflexión de la intersección x en el lado izquierdo del eje de simetría. ¿Qué es lo que percibes?
4. Calcula la distancia entre cada intersección x estimada y el eje de simetría.
5. Calcula los valores exactos para las intersecciones x al resolver la ecuación $3x^2 - 3x - 6 = 0$.
6. Verifica que la distancia entre la intersección x que encontraste en el Problema 5 y el eje de simetría es igual a tu respuesta del Problema 4.

Puedes calcular las intersecciones x y el vértice de la gráfica de una función cuadrática y usarlos para hacer un bosquejo rápido de la gráfica.

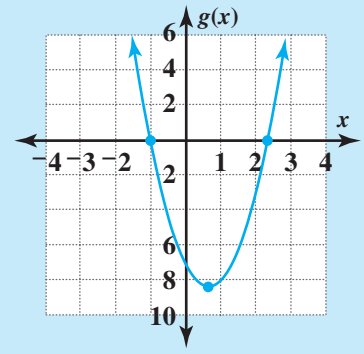
EJEMPLO

Traza una gráfica de la función $g(x) = (3x - 7)(x + 1)$ sin usar una calculadora.

Las intersecciones x de g son soluciones de $(3x - 7)(x + 1) = 0$. Como un factor debe ser 0, las soluciones son $\frac{7}{3}$ y $^-1$.

El vértice debe hallarse equidistante entre estas intersecciones x, de manera que su valor x sea la media de las soluciones: $\frac{\frac{7}{3} + {}^-1}{2} = \frac{2}{3}$. Como $g\left(\frac{2}{3}\right) = -\frac{25}{3}$, el vértice es $\left(\frac{2}{3}, -\frac{25}{3}\right)$.

Ahora grafica el vértice y los puntos donde la gráfica de g cruza el eje x, $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ y $(^-1, 0)$, y después dibuja una parábola a través de los tres puntos.



CONTENTS

Serie de problemas H

Para las ecuaciones cuadráticas dadas en los Problemas 1 al 3, haz las Partes a, b y c.

a. Calcula las intersecciones x de f.

b. Usa las intersecciones x para determinar el vértice de la parábola.

c. Grafica los tres puntos de las Partes a y b, y después dibuja la parábola.

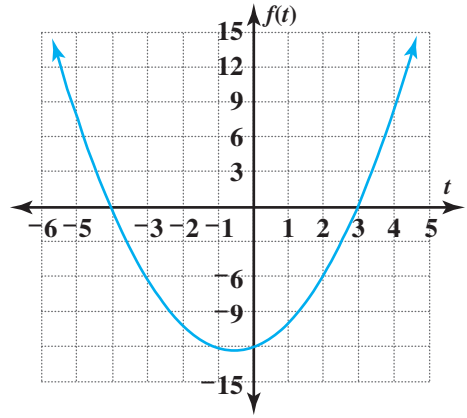
1. $f(x) = (x - 2)(x + 3)$

2. $f(x) = {}^{-}(x - 5)(2x + 1)$

3. $f(x) = x^2 - 3x - 40$

4. Angelo vio esta parábola en una calculadora graficadora e hizo un bosquejo de ésta para llevárselo a casa para la tarea. Cuando llegó a casa, había olvidado qué función había generado la parábola. Él recordó que intentaba resolver una ecuación como $(t + \_\_\_)(t - \_\_\_) = 0$.

¿Qué función usó, y cuáles son las soluciones a la ecuación de Angelo?



Comparte & resume

Explica cómo determinar las intersecciones x y el vértice de la gráfica de esta función.

$$f(x) = 3x^2 - 44x - 15$$

Investigación 4 Intersecciones de funciones

Supón que encuentras una ecuación que no sabes cómo resolver exactamente. *Hay* formas de calcular soluciones aproximadas.

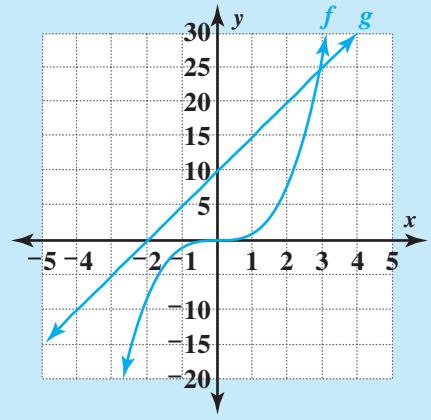
Un buen método para calcular una solución aproximada es la siguiente:

- Piensa en cada lado de la ecuación como una función.
- Grafica las dos funciones.
- Determina el punto o los puntos donde se interseca la función.
- Verifica que el valor x (entrada) de cada punto de intersección de aproximadamente el mismo valor y (salida) para ambas funciones. Es decir, verifica que los dos lados de la ecuación original sean aproximadamente iguales con esa entrada.

EJEMPLO

Resuelve $x^3 = 5x + 10$.

- Primero piensa en cada lado de la ecuación como una función: $f(x) = x^3$ y $g(x) = 5x + 10$.
- Grafica las dos funciones.



- Determina el punto o los puntos donde se intersecan las funciones. En este caso, sólo hay un punto, cerca de $x = 2.9$.
- Verifica: En $x = 2.9$, $f(x) = 24.389$ y $g(x) = 24.5$, de manera que los dos lados de la ecuación original sean aproximadamente iguales.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas I

Supón que te dan dos opciones de pago en un trabajo como niñera:

- Puedes ganar \$10 por hora por cada hora que trabajas.
- Puedes ganar \$2 si te quedas 1 hora, \$4 si te quedas 2 horas, \$8 si te quedas 3 horas y así sucesivamente. La cantidad que ganas se duplica por cada hora adicional que te quedes.

¿Hay algún número de horas para las cuales ganarás la misma cantidad con cualquier plan de pagos? En este grupo de problemas, explorarás esta pregunta.

1. Escribe una ecuación para una función L que describa ganar \$10 por hora. Usa h como la variable de entrada.

2. Escribe una ecuación para una función D que describa duplicar la cantidad que ganas por cada hora que te quedes. Usa h como la variable de entrada.

3. Grafica las dos funciones en una sola ventana. Bosqueja las gráficas y rotula qué gráfica coincide con qué función.

4. ¿Cuántas soluciones puedes encontrar para $L(h) = D(h)$? Usa Zoom y Trace para aproximar las soluciones.

5. Si tuvieras un trabajo de niñera, ¿cómo decidirías qué plan de pago escoger? Explica.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas J

En un plato de cultivo, una población de bacterias crece a una tasa del 10% cada hora. Hay 1,000 bacterias en el plato al principio del experimento. Una hora más tarde habrá 10 % de los 1,000 ó 100 bacterias más, para un total de 1,100 bacterias en el plato.

1. Haz una tabla para mostrar la población de bacterias después de 1 hora, 2 horas y 3 horas.

2. Escribe una ecuación para una función que represente cuántas bacterias habrá después de x horas. Llama p a la función.

Datos de interés

Aunque solamente has evaluado expresiones exponenciales para enteros, es posible que los exponentes sean fracciones o decimales.

CONTENTS

3. Después de un cierto tiempo, las bacterias se duplicarán en número. Es decir, $p(x) = 2{,}000$. ¿Después de cuántas horas sucederá esto? Usa tu calculadora graficadora para determinar una solución aproximada.

4. Explica cómo determinaste tu respuesta para el Problema 3.

5. ¿Qué ecuación resolverías para calcular cuántas horas se necesitan para que el número de bacterias en el plato se tripliquen? Determina una solución aproximada.

MATERIALES
calculadora graficadora

Serie de problemas K

Considera cómo resolverías la ecuación *cúbica* $x^3 = 2x - 0.5$.

1. Si usas el método de graficar dos funciones y calcular sus intersecciones, ¿qué par de funciones graficarías?

2. Grafica tus funciones. ¿Cuántas soluciones tiene $x^3 = 2x - 0.5$?

3. Aproxima todas las soluciones de la ecuación. Verifica los valores por sustitución.

4. Hakeem sugirió hacer lo mismo en ambos lados de la ecuación para obtener $x^3 - 2x + 0.5 = 0$ y después graficar la función $h(x) = x^3 - 2x + 0.5$.

   a. ¿Dónde buscarías para encontrar las soluciones de $x^3 - 2x + 0.5 = 0$?

   b. Grafica la función, y usa tu gráfica para estimar las soluciones.

   c. ¿Qué método prefieres: el método de Hakeem o graficar dos funciones y determinar las intersecciones?

Comparte & resume

Para cada ecuación, determina si puedes resolverla exacta o aproximadamente. Después resuélvela de la mejor manera que puedas.

1. $400k + 10 = 500k$
2. $3^G = 1.5G + 5$
3. $x^2 = \sqrt{x + 1}$

Ejercicios por tu cuenta

Practica & aplica

1. Traza una gráfica de cada función en la Parte a de un solo grupo de ejes. Usa un grupo de ejes diferente para hacer lo mismo para las funciones en la Parte b. Después responde las preguntas.

a. $y = 2x$
$y = 2(x + 1)$
$y = 2(x + 2)$
$y = 2(x + 3)$

b. $y = 2(x - 1)$
$y = 2(x - 1) + 1$
$y = 2(x - 1) + 2$
$y = 2(x - 1) + 3$

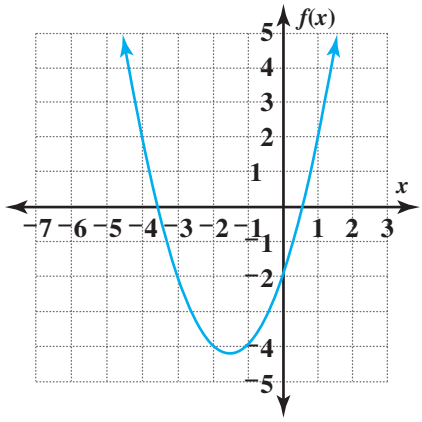
c. Describe cómo las cuatro gráficas en la Parte a son como aquéllas en la Parte b.

d. Describe cómo las cuatro gráficas en la Parte a son diferentes de aquéllas en la Parte b.

e. Encuentra otra función que pertenezca al conjunto de las funciones en la Parte a y otra que pertenezca al conjunto en la Parte b.

f. ¿Cuáles de las ocho gráficas contiene el punto (3, 7)? Explica cómo encontraste tu respuesta.

2. A continuación hay una gráfica de $f(x) = x^2 + 3x - 2$.



a. Traza una gráfica de $g(x) = (x - 2)^2 + 3(x - 2) - 2$ y una de $h(x) = (x + 2)^2 + 3(x + 2) - 2$.

b. ¿Cómo se relacionan las gráficas de g y h con la gráfica f?

En los Ejercicios 3 al 6, escribe una ecuación para la función g de manera que la gráfica de g tenga la misma forma que la gráfica de f.

3. La gráfica de g se traslada 5 unidades a la derecha de la gráfica $f(x) = \frac{1}{x}$.

4. La gráfica de g se traslada 3 unidades hacia arriba de la gráfica de $f(x) = x^2 + x - 2$.

5. La gráfica de g se traslada 1 unidad a la izquierda de la gráfica de $f(x) = \frac{1}{x - 3}$.

6. La gráfica de g se traslada 4 unidades a la izquierda de $f(x) = (x + 1)^2$.

Traza una gráfica de cada función y establece el dominio y el rango.

7. $f(x) = 4 - (x - 2)^2$

8. $g(x) = 5 - (x - 1)$

9. $f(x) = \frac{1}{x - 10}$

10. Considera estas funciones.

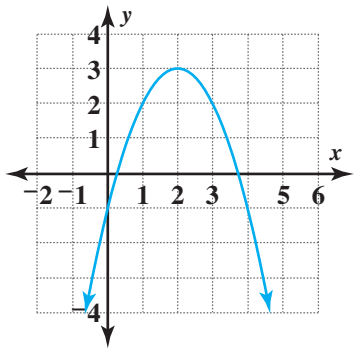
$$f(x) = 2x^2 + 1 \qquad g(x) = 2(x - 1)^2 + 2$$

a. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices para las gráficas de estas dos funciones?

b. ¿Cuál es el eje de simetría para cada una?

c. Traza las gráficas de ambas funciones en un grupo de ejes.

11. Considera esta gráfica.



a. Identifica el eje de simetría y el vértice.

b. ¿Cuál de estas funciones representa la gráfica? Explica cómo lo sabes.

$f(x) = {}^-3 + (x - 2)^2$ $\qquad g(x) = 3 - (x + 2)^2$ $\qquad h(x) = 3 - (x - 2)^2$

Identifica el vértice, el eje de simetría, y el rango de cada función.

12. $f(x) = 4 - (x + 3)^2$

13. $g(p) = (p - 5)^2 - 9$

14. $h(x) = (x + 6)^2 - 3$

15. Considera una parábola con su vértice en $(^-2, 6)$.

a. Escribe una ecuación para una función cuadrática para una parábola con este vértice.

b. ¿Hay otras parábolas con este vértice? Si es así, menciona dos más. ¿Cuántas más hay?

En los Ejercicios 16 al 18, haz las Partes a, b y c.

a. Completa el cuadrado para volver a escribir $f(x) = ax^2 + bx + c$ en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b. Encuentra el eje de simetría de la gráfica f.

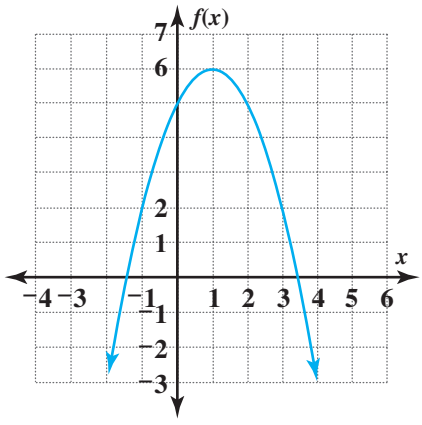
c. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

16. $f(x) = x^2 - 2x - 6$

17. $f(x) = 3 + 4x - x^2$

18. $f(x) = x^2 + 8x - 1$

19. Considera esta gráfica de $f(x) = {}^-x^2 + 2x + 5$.



a. Usa la gráfica para encontrar soluciones aproximadas de $f(x) = 0$. Explica cómo encontraste tu respuesta.

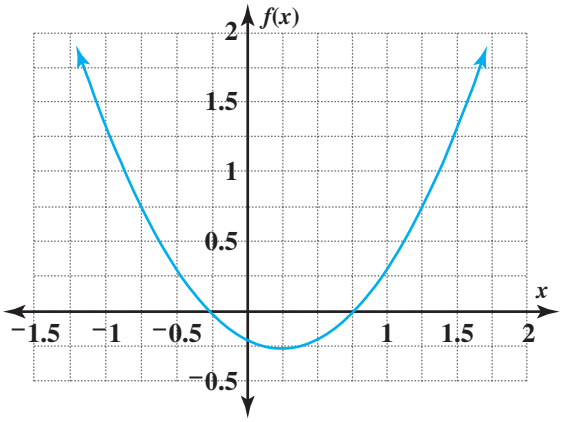
b. Usa la fórmula cuadrática o completa el cuadrado para resolver $f(x) = 0$ exactamente. ¿Están cercanas tus aproximaciones?

c. Encuentra el vértice de la gráfica de f.

d. ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de f?

e. Calcula la distancia entre cada solución de $f(x) = 0$ y el eje de simetría.

20. Considera esta gráfica de $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{16}$.



a. Usa la gráfica para calcular las soluciones aproximadas de $f(x) = 0$.

b. Usa la fórmula cuadrática o completa el cuadrado para resolver $f(x) = 0$ exactamente. ¿Están cercanas tus aproximaciones?

c. Encuentra el vértice de la gráfica de f.

d. ¿Cuál es el eje de simetría de la gráfica de f?

e. Calcula la distancia entre cada solución de $f(x) = 0$ y el eje de simetría.

Un ingeniero podría requerir saber el rango de una función que modele el aumento en la longitud de las secciones de una vía férrea de acero, con respecto a la temperatura para determinar la separación a la que se deberían colocar.

En los Ejercicios 21 al 23, la gráfica de la función es una parábola. Haz las Partes a, b y c para cada ejercicio.

a. Encuentra la intersección x de la parábola.

b. Usa las intersecciones x para encontrar el eje de simetría y el vértice.

c. Usa las intersecciones x y el vértice para bosquejar la parábola.

21. $g(x) = (x - 3)(x + 0.5)$

22. $h(x) = (2x + 3)(x - 1)$

23. $f(x) = {}^{-}x^2 - 4x + 5$

En los Ejercicios 24 al 26, usa las gráficas para determinar cuántas soluciones tiene la ecuación.

24. $x^2 - 2x = 4 - x - x^2$

25. $x^2 - x - 2 = 1 - 2x - x^2$

26. $2 - x^2 = 1 - 2x^2$

Bosqueja las gráficas para encontrar soluciones aproximadas para cada ecuación.

27. $x^3 - 4x - 1 = x - 1$

28. $x^3 - 4x - 1 = x + 4$

29. $x^3 - 4x - 1 = 5 - x^2$

Conecta & amplía

30. Traza una gráfica para cada función en la Parte a en un solo grupo de ejes. Haz lo mismo para la Parte b, usando un nuevo grupo de ejes. Luego responde las preguntas. (Ayuda: Grafica puntos para bosquejar la gráfica de $y = \frac{1}{x^2}$, y usa esta gráfica para ayudarte a bosquejar las otras.)

a. $y = \frac{1}{x^2}$

$y = \frac{1}{(x - 2)^2}$

$y = \frac{1}{(x + 2)^2}$

b. $y = -\frac{1}{x^2}$

$y = 3 - \frac{1}{x^2}$

$y = 3 - \frac{1}{(x + 2)^2}$

c. Describe en qué se parecen las gráficas de la Parte a a aquéllas de la Parte b.

d. Describe en qué se diferencian las gráficas en la Parte a de aquéllas de la Parte b.

e. Encuentra otra función que pertenezca al conjunto de funciones en la Parte a y otra que pertenezca al conjunto en la Parte b.

31. Ciencia física Un lanzador localizado 6 pies arriba del nivel del piso dispara una pelota de goma verticalmente con una velocidad inicial de 60 pies por segundo. La ecuación que relaciona la altura de la pelota en el tiempo t es

$$h(t) = 6 + 60t - 16t^2$$

donde h está en pies y t está en segundos.

a. Traza una gráfica de h.

Otra pelota de goma se lanza 2 segundos después, con la misma dirección y velocidad inicial.

b. Supón que graficas la altura de la segunda pelota con el tiempo desde que la *primera* bola se lanzó en el eje horizontal. ¿Cómo se relaciona la segunda gráfica con la primera?

c. Escribe una ecuación para la altura de la segunda bola en el tiempo.

d. ¿La segunda pelota chocará con la primera pelota cuando la primera pelota está camino hacia arriba o hacia abajo? Explica cómo puedes decirlo a partir de las gráficas de las dos funciones.

Para cada función de f, escribe una nueva función g trasladada 2 unidades hacia abajo y 4 unidades a la izquierda de f.

32. $f(x) = 2^{x+1} - 1$

33. $f(x) = 2(x - 3)^2 + 1$

34. $f(x) = (x - 1)^3 - x + 1$

35. $f(x) = 1 + \frac{1}{x^2 + 1}$

36. Geometría Se usa un trozo de alambre de 20 cm de longitud para hacer un rectángulo.

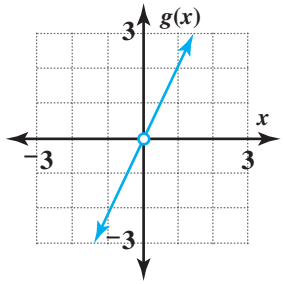
a. Llama L a la longitud del rectángulo. Escribe una fórmula para el ancho W del rectángulo en términos de su longitud.

b. Escribe una función para el área A del rectángulo en términos de la longitud L.

c. Completa el cuadrado de la expresión cuadrática que escribiste para la Parte b. Usa la expresión rescrita para determinar las coordenadas del vértice de la gráfica de la Función A.

d. ¿Cuáles son las dimensiones de los lados de un rectángulo con el área máxima? ¿Cuál es el área de este rectángulo?

37. La expresión $\frac{2x^2}{x}$ es equivalente a $2x$ para todos los valores de x excepto 0 ($\frac{2x^2}{x}$ es indefinida para $x = 0$). La gráfica de $g(x) = \frac{2x^2}{x}$ se parece a la gráfica de $h(x) = 2x$ con un agujero en $x = 0$.



El dominio de g son todos los números reales excepto 0. El rango de g es todos los números reales excepto 0.

Ahora considera la función $f(x) = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2}$. Traza una gráfica de f y da su dominio y rango.

En los Ejercicios 38 al 40, haz las Partes a, b y c.

a. Escribe la ecuación en la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Luego completa el cuadrado para volver a escribirla en la forma $f(x) = a(x - h)^2 + k$.

b. Determina el eje de simetría de la gráfica de f.

c. Calcula las coordenadas del vértice de la parábola.

38. $f(x) = 2x^2 - 8x + 2x^2 - 1$

39. $f(x) = 1 + 4x - 2x^2$

40. $f(x) = {}^{-}x^2 - x - 1 - x - (2 + x)$

41. Traza una gráfica y úsala para explicar por qué la ecuación $3^x + 2 = 0$ no tiene soluciones.

42. La función cúbica $c(x) = x^3 + 2x^2 - x - 2$ se puede volver a escribir como $c(x) = (x + 2)(x + 1)(x - 1)$.

a. Encuentra las intersecciones x de c.

b. Encuentra la intersección y de c.

c. Usa la intersección para dibujar un bosquejo burdo de c.

43. Considera la ecuación $(x + 2)^2 - 2 = {}^{-}x^2 + 4$.

a. Usa el método para graficar dos funciones para estimar las soluciones de la ecuación.

b. Usa la función cuadrática para calcular las soluciones exactas de esta ecuación. ¿Estuvieron cercanas tus estimaciones?

En tus propias palabras

Explica cómo la representación gráfica te puede ayudar a resolver ecuaciones. ¿Cómo decidirías cuándo determinar soluciones aproximadas con una gráfica y cuándo encontrar la solución exacta con álgebra?

44. Traza una gráfica de $y = \frac{1}{x}$. Usa tu bosquejo para pensar sobre estas preguntas.

a. ¿Cuántas soluciones de $\frac{1}{x} = 5$ hay?

b. ¿Cuántas soluciones de $\frac{1}{x - 5} = 5$ hay?

c. ¿Cuántas soluciones de $\frac{1}{x} = x$ hay? ¿De $\frac{1}{x} = {}^{-}x$?

d. ¿Cuántas soluciones de $\frac{1}{x} = x^2$ hay?

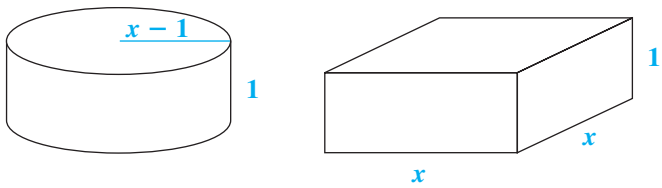
e. Usa el método de graficar dos funciones para mostrar las soluciones de $\frac{1}{x} = (x - 3)^2$. Usa tu gráfica para estimar esas soluciones.

45. Usa el método de graficar dos funciones y localizar los puntos de intersección para determinar por lo menos cuatro valores de x que satisfagan cada desigualdad.

a. $x^2 - 2x - 7 < 2x - 3$

b. $x^2 - 2x - 7 > 2x - 3$

46. Geometría El radio de un recipiente cilíndrico es 1 unidad menor que la longitud lateral de la base cuadrada de un recipiente rectangular.



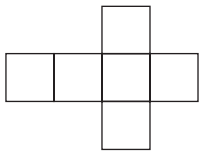
a. Para cada recipiente, escribe una función para el volumen.

b. Usa las funciones de volumen para hacer una gráfica que compare los volúmenes de los dos recipientes. Toma en cuenta que el valor de x debe ser mayor que 1, o el recipiente cilíndrico no existiría.

c. ¿Para qué valor de x los recipientes pueden contener la misma cantidad?

Repaso mixto

47. Geometría Recuerda que una figura bidimensional que se puede doblar en una figura tridimensional cerrada se llama *red*. Por ejemplo, esta es una red para un cubo.



Dibuja otra red para un cubo.

En los Ejercicios 48 al 51, menciona cuál de las siguientes descripciones se ajusta a la relación:

- una variación directa
- lineal pero no una variación directa
- no lineal

48. $r = 25v + 32$

49. $a = -\frac{5}{6}j$

50. $k = \frac{3}{n}$

51.

x	2	4	6	8	10	12
y	25	36	47	58	69	80

Menciona si los puntos de cada conjunto son colineales.

52. (3, 1); (8, 12); ($^-$1, $^-$10)

53. ($^-$2, 9); (2, 2); (4, $^-$1.5)

54. (15, 22); (0, 1); (5, $^-$6)

Resuelve cada ecuación.

55. $3 - \sqrt{7s + 2} = -7$

56. $3 - \frac{1}{z + 7} = 2$

57. $x^2 + 3x = 6$

58. $16k^2 + 1 = -8k$

59. Prueba que este truco con números siempre da 3: *Elige un número, excepto 0. Multiplica el número por 9 y súmale 6. Después divídelo entre 3 y réstale 2. Divídelo entre el número con que comenzaste.*

60. Estadística A continuación están las áreas de los 50 estados de EE.UU., en millas cuadradas.*

1,545	2,489	5,543	8,721	9,350	9,614	10,555	10,931	12,407	24,230
32,020	35,385	36,418	40,409	42,143	42,774	44,825	46,055	48,430	51,840
52,419	53,179	53,819	54,556	56,272	57,914	59,425	65,498	65,755	69,704
69,898	70,700	71,300	77,116	77,354	82,277	83,570	84,899	86,939	96,716
97,814	98,381	104,094	110,561	113,998	121,589	147,042	163,696	268,581	663,267

El monumento a Washington en Washington, D.C.

a. Crea un histograma para mostrar estos datos. Usa intervalos de 20,000 para las barras. Debido a que dos estados son mucho más grandes que todos los otros, puede ser que quieras excluirlos o hacerlos una barra especial, tal como "más que 200,000".

b. Completa el diagrama de tallo y hojas que se muestra a continuación, de estos datos. Los "tallos" en este diagrama representan miles.

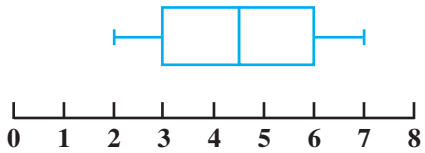
Tallo	Hojas
0	1545 2489 5543 8721
1	0555 0931 2407
2	4230

Clave: 1|0555 = 10,555

c. Ahora crea un diagrama de caja y patillas para estos datos. Recuerda que para crear el diagrama necesitas los valores máximo y mínimo junto con la mediana y el primer y tercer *cuartil.* Los cuartiles se pueden pensar como medianas de las mitades superior e inferior de los datos. Por ejemplo, considera este grupo de datos:

2 3 4 5 6 7

La mediana es 4.5, el primer cuartil es 3, y el tercer cuartil es 6. El diagrama de caja y patillas de estos pequeños datos se muestra a continuación.



*Fuente: *World Almanac and Book of Facts 2003.*

CONTENTS

Capítulo 8 Repaso & autoevaluación

Resumen del capítulo

VOCABULARIO
dominio
función
intersecciones *x*
rango

Este capítulo se enfocó en un tipo particular de relación matemática llamada *función*. Una función matemática produce una sola salida para cada entrada y se puede describir con una gráfica o con una ecuación.

Trabajaste con gráficas y ecuaciones para encontrar los valores máximos y mínimos de las funciones. Usaste estos valores extremos para identificar el rango de una función para resolver problemas que impliquen altura máxima o área máxima.

Estudiaste a profundidad las gráficas de funciones cuadráticas. Encontraste el eje de simetría y las coordenadas del vértice al inspeccionar las gráficas y completar el cuadrado de las expresiones cuadráticas. También resolviste ecuaciones de la forma $f(x) = 0$ para calcular las intersecciones x de las funciones cuadráticas.

Finalmente, resolviste ecuaciones de la forma $f(x) = g(x)$ para localizar los puntos donde se intersecan las gráficas de f y g.

Estrategias y aplicaciones

Las preguntas en esta sección te ayudarán a revisar y aplicar las ideas importantes y estrategias desarrolladas en este capítulo.

Entiende las funciones y describe el dominio y el rango de una función

1. Explica cómo puedes determinar si una relación podría ser una función al examinar una tabla de entradas y salidas.
2. Da un ejemplo de una relación que *no* sea una función.
3. Explica cómo puedes decir si una relación es una función al observar esta gráfica. Da un ejemplo de una gráfica que no sea una función.
4. Da un ejemplo de una función para la que los números negativos no tienen sentido como parte del dominio.
5. Describe el rango de la función $k(n) = 3n^2 - 4$.

Determina los valores máximo y mínimo de funciones cuadráticas

6. Explica dos maneras de determinar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

7. Considera todos los rectángulos posibles con un perímetro de 22 centímetros.

a. Si la longitud de un rectángulo es x cm, escribe una ecuación para una función A para el área del rectángulo.

b. Usa tu respuesta para la Parte a para determinar el área máxima posible para el rectángulo.

c. ¿Qué dimensiones dan el área máxima?

8. Supón que la función $H(t) = 100t - 4.9t^2$ da la altura en metros de un cohete lanzado verticalmente desde el nivel del piso, donde t es el tiempo en segundos. Estima la máxima altitud del cohete y menciona cuántos segundos después de ser lanzado alcanza su máxima altitud.

Entiende y usa gráficas de funciones cuadráticas

9. Explica cómo se relacionan las gráficas de g y h con la gráfica de $f(t) = 2t^2$.

$$g(t) = 10 + 2(t + 2)^2 \qquad h(t) = 2(t - 2)^2 - 3$$

10. ¿Cuál de estas funciones cuadráticas tiene su vértice en $(3, {}^-3)$?

$g(t) = 3(t + 3)^2 - 3$ $\quad h(t) = 4(t - 3)^2 - 3$ $\quad k(t) = 3 - 3(t - 3)^2$

11. Escribe la ecuación para una función cuadrática con vértice $({}^-6, 1)$.

12. Explica cómo el rango de una función cuadrática se relaciona eon el vértice de su parábola.

13. Explica dos métodos para determinar el vértice y el eje de simetría para la gráfica de $g(x) = (x + 2)(x + 4)$. Da el vértice y el eje de simetría.

14. Explica cómo puedes usar las intersecciones x de una función cuadrática f para determinar su vértice.

Resuelve ecuaciones que presentan dos funciones

15. Explica cómo usar el método para graficar dos funciones para resolver la ecuación $x^3 = 2x^2 - 1$.

16. Determina cuántas soluciones tiene esta ecuación y explica cómo determinaste tu respuesta.

$$x^2 + 2x - 3 = x - 2$$

Demuestra tus destrezas

Copia y completa cada tabla para una función dada.

17. $g(x) = x^2 + 3x - 1$

Entrada	Salida
$^-2$	
$^-1$	
0	
1	
2	

18. $h(x) = \frac{1}{4 - x}$

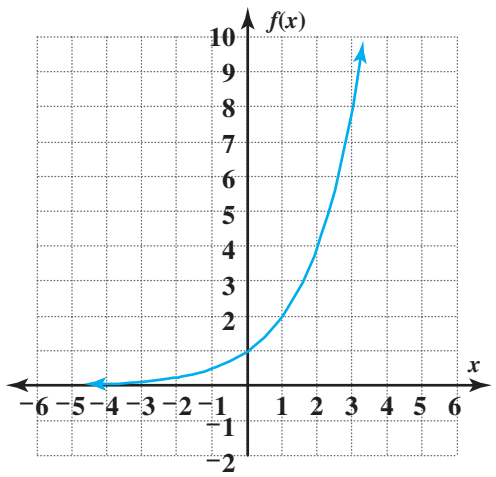
Entrada	Salida
$^-4$	
$^-2$	
0	
2	
4	

19. Esta es una gráfica de $f(x) = 2^x$.

a. Traza una gráfica de $g(x) = 2^{x-2}$.

b. Traza una gráfica de $h(x) = 2^{x+3}$.

c. Traza una gráfica de $j(x) = 2^x - 2$.



Menciona si cada función tiene un valor máximo o mínimo, y da las coordenadas de este punto.

20. $f(x) = {}^-x^2 + 2x - 2$

21. $j(x) = {}^-5 + x + x^2$

22. $k(x) = 3 - 4(1 - x)^2$

Escribe la ecuación para una función g que tiene la misma forma que la función f pero trasladada 2 unidades a la izquierda y 1 unidad hacia abajo.

23. $f(x) = {}^{-}1 + \frac{1}{x^3 + 1}$

24. $f(x) = 3^{x+1} - 2$

25. $f(x) = x(x - 2)$

26. Determina el vértice y el eje de simetría de $f(x) = (x + 5)^2 + 9$ sin graficar.

Para cada función cuadrática, completa el cuadrado y sin graficar determina el vértice y el eje de simetría de su parábola.

27. $Q(x) = 2x^2 + 2x - 6$

28. $m(x) = {}^{-}x^2 + \frac{7}{2}x - 3$

29. $r(x) = x(x + 3)$

30. Considera la función $f(x) = {}^{-}x^2 + 8x - 7$.

a. Determina las intersecciones x de la gráfica de f.

b. ¿Cuál es el eje de simetría y el vértice de la gráfica de f?

c. Usa las intersecciones x y el vértice para bosquejar una gráfica de f.

31. Grafica para resolver esta ecuación.

$$x^2 + 1 = 0.5x + 2.5$$

32. Explica cómo resolver la ecuación $x^2 + x = {}^{-}x - 1$ sin graficar. Despeja x.